Astr. P.
57 h

Grunert

Der

Hohen Königlich Bairischen

Akademie der Wissenschaften

zu

München

empfiehlt sich hochachtungs-

vollst

der

Greifswald Verfasser.

1. September 1832.

Theorie

der

wahren und scheinbaren Bewegung eines Weltkörpers um die Sonne

nebst

neuen Methoden zur Bestimmung der Bahn aus drei Beobachtungen.

Von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Greifswald 1857,

Druck der Kgl. Univers.-Buchdr. von F. W. Kunike.

133 = B.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung.

Das grosse Problem, in welchem alle Untersuchungen der theorischen Astronomie zuletzt wie in einem gemeinschaftlichen Brennpunkte zusammenlaufen, ist die Aufgabe: „die Bahn eines nach den Gesetzen der allgemeinen Gravitation um einen Centralkörper sich bewegenden Weltkörpers aus drei vollständigen Beobachtungen desselben zu bestimmen.“ Dieses Problem bildet auch den Hauptinhalt der „Theoria motus“ von Gauss, und die von diesem grossen Geometer gegebene Auflösung ist, wenigstens in Deutschland, in der Astronomie gegenwärtig allgemein im Gebrauch. Was die theoretische Darstellung dieser Auflösung betrifft, so wird schwerlich Jemand in Abrede zu stellen geneigt sein, dass es besondere Schwierigkeiten hat, dieselbe in ihrem innersten Wesen vollständig zu durchdringen, wovon der Grund allerdings wohl hauptsächlich in der von dem berühmten Geometer gebrauchten, weit mehr synthetischen als analytischen Darstellungsweise zu suchen ist; jedoch ist dies nach meiner Meinung nicht der alleinige Grund, indem es, wie mir scheint, noch tiefer liegende Gründe giebt, die selbst gewisse Zweifel erregen können, ob durch die gegebene, eine ziemlich grosse Anzahl vorbereitender Rechnungen in Anspruch nehmende Auflösung wirklich ganz im Allgemeinen eine fortwährende successive Annäherung erreicht wird, oder ob dieselbe vielmehr nur in einem gewissen eingeschränkteren, der praktischen Anwendung übrigens wahrscheinlich

keinen wesentlichen Eintrag thuenden Sinne erreicht wird, wobei ich ausdrücklich hervorhebe, dass der Umstand, dass alle numerischen Rechnungen in der That zu einer solchen successiven Annäherung geführt haben, durchaus noch kein Beweis a posteriori ist, dass die successive Annäherung nicht vielleicht bloss in einem gewissen eingeschränkteren Sinne, also in Bezug auf das vorliegende Problem nicht in völliger Allgemeinheit, stattfinde und vor sich gehe. Es ist aber gar nicht meine Absicht, meine Ansichten hierüber an diesem Orte weiter zu entwickeln, was einen viel zu grossen Raum in Anspruch nehmen und eine besondere Abhandlung erfordern würde.

Eine andere Auflösung unsers Problems hat Lagrange in der Mécanique analytique. Tome II. Nouvelle édition. Paris 1815. Septième section. §. III. gegeben, ganz in derselben überaus lichtvollen, alle wesentlichen Punkte mit der grössten Deutlichkeit hervorhebenden Weise, welche die sämmtlichen Arbeiten dieses grossen Mathematikers so sehr auszeichnet. Die von Pontecoulant in seinem bekannten Werke gegebene Auflösung ist eigentlich nur als eine weitere Ausführung der Lagrange'schen Auflösung zu betrachten, welche derselben wesentlich Neues nicht hinzufügt, übrigens sich ziemlich häufige Vernachlässigungen und Abkürzungen gestattet, die nicht immer vollständig gerechtfertigt und theilweise in der That etwas gewagt erscheinen. Hauptsächlich hat man bei der Lagrange'schen Methode als ein ihrer vortheilhaften Anwendung entgegenstehendes Moment geltend gemacht, dass sie eine fortwährende successive Annäherung nicht gestatte, was allerdings auch bei der von ihrem berühmten Urheber gebrauchten Darstellungsweise ganz richtig ist.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich eine neue Auflösung des berühmten Problems gegeben, welche zwar mit der Lagrange'schen Auflösung im Wesentlichen auf gleichen Gründen beruhet, aber, wie ich hoffe, klar zeigt, dass diese Auflösung in veränderter Darstellung sehr wohl auch eine fortwährende successive Annäherung gestattet, und sich überhaupt nie und nirgends annähernde Voraussetzungen erlaubt, über deren Einfluss auf das Resultat sich nicht ein sicheres Urtheil fällen lässt, wobei ich mir noch besonders hervorzuheben erlaube, dass ich bei dieser Auflösung die Näherung durchaus nur von den verschiedenen Potenzen der sogenannten Constante des Sonnensystems abhängig gemacht habe, was wenigstens mit derselben vollständigen Consequenz wie hier früher noch nicht geschehen ist, mir aber in der That der theoretisch allein richtige Weg bei diesen Untersuchungen zu sein scheint. Auch ist die Auflösung ganz allgemein für jede Art des

Kegelschnitts anwendbar, und führt zu sicheren Criterien über die Art des Kegelschnitts in jedem besonderen Falle. Dabei bin ich zugleich zu einer ziemlich grossen Anzahl neuer, nach meiner Meinung zum Theil sehr bemerkenswerther analytischer Ausdrücke in Bezug auf die allgemeine Theorie der nach den Gesetzen der allgemeinen Gravitation vor sich gehenden Bewegung geführt worden, die ich der Aufmerksamkeit der Leser zu empfehlen mir erlaube, aber hier natürlich nicht einzeln namhaft machen kann, indem ich nur noch im Allgemeinen hinzufüge, dass diese Ausdrücke besonders bei der Berechnung der eigentlichen Elemente der Bahn vortreffliche Dienste leisten können. Auf die von mir bei der näherungsweisen Auflösung der betreffenden Gleichungen angewandten Methoden, die immer auf eine zwischen bestimmt angebbaren möglichst engen Gränzen eingeschlossene Grösse zurückgehen, erlaube ich mir gleichfalls noch besonders hinzuweisen.

Ausser der so eben näher besprochenen Auflösung der Aufgabe von der Bestimmung der wahren Bahn aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen habe ich noch eine zweite Auflösung dieser Aufgabe gegeben, die sich unmittelbar an die Bestimmung der scheinbaren Bahn anschliesst und aus dieser letzteren abgeleitet wird, lege aber hierauf weniger praktischen als theoretischen Werth, in Bezug auf die von mir mit grosser analytischer Allgemeinheit entwickelten Eigenschaften der scheinbaren Bahn, worüber schon früher Cauchy einige speciellere Untersuchungen angestellt hat, die ich unlängst in einem, in den Astronomischen Nachrichten. Band XLIII. 1856. S. 145. abgedruckten Aufsatze in systematischer Folge zusammengestellt und auf eigenthümliche Art bewiesen habe, da sie sich sonst nur sehr zerstreut in verschiedenen Jahrgängen der Comptes rendus finden. Bei den vorliegenden Untersuchungen habe ich, wie schon erwähnt, alle mögliche Allgemeinheit zu erreichen gesucht, und eine ziemliche Anzahl neuer Beziehungen hinzugefügt. Eine hierher gehörende Untersuchung hat schon Lambert im vorigen Jahrhundert angestellt, und ist insbesondere zu einem berühmten Satze (Mémoires de Berlin. 1771. pag. 352.) gelangt, mittelst welches man aus der Gestalt der scheinbaren Bahn beurtheilen kann, ob zur Zeit der Beobachtung die Entfernung des Weltkörpers von der Sonne grösser oder kleiner war als die Entfernung der Erde von der Sonne. Die Untersuchungen von Lambert über diesen Gegentsand halte ich aber für sehr wenig genügend, und bin der Meinung, dass der von ihm gegebene Ausdruck seines Satzes nicht der wahre ist, derselbe also auch in dieser Gestalt wenig Werth für die Praxis hat. Den

allein wahren analytischen Ausdruck dieses allerdings sehr merkwürdigen Satzes, mit allen dabei zur Geltung kommenden analytischen Bedingungen, wodurch derselbe nach meiner Meinung auch erst fruchtbar für die Anwendung wird, glaube ich in dem letzten Anhange zu dieser Abhandlung gegeben zu haben, und erlaube mir daher denselben schliesslich noch besonders der Aufmerksamkeit der Leser zu empfehlen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Bewegung eines Weltkörpers um die Sonne.

§. 1.

Wir wollen uns zwei Körper denken, welche vermöge der allgemeinen Gravitation, und ganz nach deren Gesetzen, entweder anziehend oder abstossend, auf einander wirken. Die Massen dieser beiden Körper seien M und m. Indem wir uns nun vornehmen, die Bahn des Köpers m in Bezug auf den Körper M, oder um denselben, zu bestimmen, legen wir ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume zu Grunde, und bezeichnen in Bezug auf dieses Coordinatensystem, immer ein bestimmtes Zeitmoment, welchem die von einem bestimmten Anfange an gerechnete Zeit t entspricht, im Auge habend, in diesem Zeitmomente die Coordinaten des Körpers M durch X, Y, Z. Denken wir uns dann durch den Körper M, in welcher Lage im Raume er sich auch befinden mag, ein dem angenommenen festen primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichnen in diesem Systeme, also in Bezug auf M als Anfangspunkt, die Coordinaten des Körpers m durch x, y, z; so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ die primitiven Coordinaten des Körpers m.

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Körpers m von dem Körper M durch r, alle Grössen natürlich immer auf die Zeit t bezogen, so ist die Wirkung des Körpers M auf den Körper m nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation:

$$\frac{M}{r^2},$$

und diese Wirkung ist von m nach M hin oder von M nach m hin gerichtet, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt. Bezeichnen wir also die 180° nicht über-

steigenden Winkel, welche die von M nach m hin gezogene Linie mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so sind die Composanten der Kraft $\frac{M}{r^2}$ nach den drei Coordinatenaxen, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt:

$$\frac{M}{r^2}\cos(180^0-\varphi)=-\frac{M}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos(180^0-\psi)=-\frac{M}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos(180^0-\chi)=-\frac{M}{r^2}\cos\chi$$

oder:

$$\frac{M}{r^2}\cos\varphi=+\frac{M}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos\psi=+\frac{M}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos\chi=+\frac{M}{r^2}\cos\chi;$$

also:

$$\mp\frac{M}{r^2}\cos\varphi, \mp\frac{M}{r^2}\cos\psi, \mp\frac{M}{r^2}\cos\chi;$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt. Nun ist aber offenbar:

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}, \cos\psi=\frac{y}{r}, \cos\chi=\frac{z}{r};$$

also sind die drei in Rede stehenden Composanten:

$$\mp\frac{Mx}{r^3}, \mp\frac{My}{r^3}, \mp\frac{Mz}{r^3};$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Betrachten wir aber die Masse M nicht, wie bisher, immer als positiv, sondern als positiv oder als negativ, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt, so können wir die obigen Composanten allgemein durch

$$-\frac{Mx}{r^3}, -\frac{My}{r^3}, -\frac{Mz}{r^3}$$

ausdrücken; und nach den Grundlehren der Mechanik haben wir daher die drei folgenden Gleichungen:

$$1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2(X+x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{Mx}{r^3}, \\ \frac{\partial^2(Y+y)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{My}{r^3}, \\ \frac{\partial^2(Z+z)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{Mz}{r^3}. \end{cases}$$

Die Wirkung des Körpers m auf den Körper M ist nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation:

$$\frac{m}{r^2},$$

und diese Wirkung ist von M nach m oder von m nach M hin gerichtet, jenachdem der Körper m anziehend oder abstossend auf den Körper M wirkt; also sind, wenn φ, ψ, χ ihre aus dem Vorhergehenden bekannte Bedeutung behalten, die Composanten der obigen Wirkung nach den drei Coordinatenaxen, jenachdem der Körper m anziehend oder abstossend auf den Körper M wirkt:

$$\frac{m}{r^2}\cos\varphi = +\frac{m}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos\psi = +\frac{m}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos\chi = +\frac{m}{r^2}\cos\chi$$

oder:

$$\frac{m}{r^2}\cos(180^0-\varphi) = -\frac{m}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos(180^0-\psi) = -\frac{m}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos(180^0-\chi) = -\frac{m}{r^2}\cos\chi;$$

also:

$$\pm\frac{m}{r^2}\cos\varphi,\ \pm\frac{m}{r^2}\cos\psi,\ \pm\frac{m}{r^2}\cos\chi;$$

wenn man die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Masse m anziehend oder abstossend auf M wirkt; folglich, weil nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\ \cos\psi=\frac{y}{r},\ \cos\chi=\frac{z}{r}$$

ist:

$$\pm\frac{mx}{r^3},\ \pm\frac{my}{r^3},\ \pm\frac{mz}{r^3};$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Betrachten wir aber die Masse m nicht, wie bisher, immer als positiv, sondern als positiv oder als negativ, jenachdem dieselbe anziehend oder abstossend auf M wirkt; so können wir die obigen Composanten allgemein durch

$$+\frac{mx}{r^3},\ +\frac{my}{r^3},\ +\frac{mz}{r^3}$$

ausdrücken, und haben daher nach den Grundlehren der Mechanik die folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \ldots\ldots\quad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{mx}{r^3},\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{my}{r^3},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\frac{mz}{r^3}.$$

Ziehen wir nun die Gleichungen 2) von den Gleichungen 1) ab, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{(M+m)x}{r^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{(M+m)y}{r^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\frac{(M+m)z}{r^3}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $M+m=\mu$ setzen, die Gleichungen:

$$3)\quad \ldots\ldots\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\dfrac{\mu x}{r^3}=0, \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\dfrac{\mu y}{r^3}=0, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\mu z}{r^3}=0; \end{cases}$$

durch welche die Bewegung des Körpers m in Bezug auf den

Körper M, oder um denselben, offenbar charakterisirt wird. Um aber diese Bewegung des Körpers m wirklich vollständig kennen zu lernen, müssen wir die vorstehenden Gleichungen zu integriren versuchen, wozu wir jetzt übergehen wollen, indem wir dabei immer festhalten, dass im Vorhergehenden die Massen M und m als positiv oder als negativ betrachtet worden sind, jenachdem sie respective auf die Massen m und M anziehend oder abstossend wirken.

§. 2.

Um jedoch ein vollständiges Verständniss des Folgenden zu vermitteln, müssen wir, bevor wir zur Integration der drei in Rede stehenden Gleichungen wirklich übergehen, vorher noch Nachstehendes bemerken. Hätte man einen festen Punkt von der Masse $M+m=\mu$, der nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation, und zwar, jenachdem μ positiv oder negativ ist, anziehend oder abstossend auf einen anderen Punkt wirkte, von dessen Wirkung auf den ersteren Punkt ganz abgesehen würde; so lege man, um die Bewegung des zweiten Punktes kennen zu lernen, durch den ersten festen Punkt von der Masse μ als Anfang ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und bezeichne die Coordinaten des zweiten Punktes in diesem Systeme zur Zeit t durch x, y, z. Wird dann zu dieser Zeit die Entfernung der beiden Punkte von einander durch r bezeichnet, so ist nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation die Wirkung des ersten Punktes auf den zweiten:

$$\frac{\mu}{r^2},$$

indem man diese Wirkung von dem zweiten Punkte nach dem ersten, oder von dem ersten nach dem zweiten Punkte hin gerichtet annimmt, oder als anziehend oder abstossend betrachtet, jenachdem die Grösse $\mu=M+m$ positiv oder negativ ist. Bezeichnen nun φ, ψ, χ die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem ersten Punkte aus nach dem zweiten Punkte hin gezogene gerade Linie r mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, so sind, jenachdem μ positiv oder negativ ist, die Composanten der obigen Wirkung nach den drei Coordinatenaxen:

$$\frac{\mu}{r^2}\cos(180^0-\varphi)=-\frac{\mu}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{\mu}{r^2}\cos(180^0-\psi)=-\frac{\mu}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{\mu}{r^2}\cos(180^0-\chi)=-\frac{\mu}{r^2}\cos\chi$$

oder

$$\frac{-\mu}{r^2}\cos\varphi = -\frac{\mu}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{-\mu}{r^2}\cos\psi = -\frac{\mu}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{-\mu}{r^2}\cos\chi = -\frac{\mu}{r^2}\cos\chi;$$

also allgemein:

$$-\frac{\mu}{r^2}\cos\varphi, -\frac{\mu}{r^2}\cos\psi, -\frac{\mu}{r^2}\cos\chi;$$

und folglich, weil

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \cos\psi = \frac{y}{r}, \cos\chi = \frac{z}{r}$$

ist:

$$-\frac{\mu x}{r^3}, -\frac{\mu y}{r^3}, -\frac{\mu z}{r^3}.$$

Daher erhält man zur Bestimmung der Bahn des zweiten Punktes nach den Lehren der Mechanik die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\mu z}{r^3};$$

oder:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen 3) in §. 1., so erhellet auf der Stelle, dass die Bewegung des Körpers m in Bezug auf den Körper M, oder die relative Bewegung des Körpers m rücksichtlich des Körpers M, ganz eben so vor sich geht, als wenn die Summe $\mu = M+m$ der mit ihren gehörigen Vorzeichen genommenen Massen M und m der beiden Körper in

einem gewissen festen Punkte vereinigt wäre, und dieser Punkt nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation auf einen zweiten Punkt wirkte, von dessen Wirkung auf den ersten Punkt ganz abgesehen würde. Aus diesem letzteren Gesichtspunkte wollen wir nun alles Folgende auffassen, was zur Erhöhung der Deutlichkeit wesentlich beitragen wird.

§. 3.

Aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0;$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, ergeben sich sehr leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

$$z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$\frac{\partial(y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t})}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial(z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t})}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial(x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t})}{\partial t} = 0;$$

also, wenn C, C_1, C_2 drei willkührliche Constanten bezeichnen:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t} = C, \\ z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t} = C_1, \\ x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = C_2, \end{cases}$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit x, y, z, und addiren die dadurch hervorgehenden Gleichungen dann zu einander, so ergiebt sich die Gleichung

$$5) \quad \ldots\ldots \quad Cx + C_1 y + C_2 z = 0,$$

aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass die Bahn des Körpers m eine Curve von einfacher Krümmung ist, welche ganz in einer, durch den als Anfang der xyz angenommenen Punkt M gehenden Ebene liegt.

Wir wollen uns nun durch M als Anfang ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_1 y_1 z_1$ gelegt denken. Die Ebene der $x_1 y_1$ soll mit der Ebene der xy, und die Axe der x_1 soll mit der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der xy zusammenfallen. Den auf der positiven Seite der Axe der x, in der Ebene der xy genommen, liegenden Theil der Axe der x_1 wollen wir als den positiven Theil der Axe der x_1 annehmen, und der positive Theil der Axe der y_1 soll so angenommen werden, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 an durch den rechten Winkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Der positive Theil der Axe der z_1 endlich soll mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen. Den von den positiven Theilen der Axen der x und x_1 eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel wollen wir durch θ bezeichnen, und der 180^0 nicht übersteigende Winkel, unter welchem der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil der Ebene der Bahn des Körpers m nach der Seite der Axe x_1 hin, auf welcher der positive Theil der Axe der y liegt, gegen die Ebene der xy geneigt ist, soll durch i bezeichnet werden.

Weil nach 5) die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der xy, d. i. die Gleichung der Axe der x_1, in dem Systeme der xy

$$Cx + C_1 y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{C}{C_1} x$$

ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{tang}\,\theta = -\frac{C}{C_1}.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man zwischen den Coordinaten der beiden Systeme der xyz und $x_1 y_1 z_1$ die folgenden Gleichungen:

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta,$$

$$y = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta,$$

$$z = z_1;$$

und fassen wir nun einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der $y_1 z_1$ in's Auge, so ist für diesen Punkt $x_1 = 0$, also nach den vorstehenden Gleichungen:

$$x = -y_1 \sin\theta, \; y = +y_1 \cos\theta, \; z = z_1;$$

folglich nach 5):

$$-Cy_1 \sin\theta + C_1 y \cos\theta + C_2 z_1 = 0,$$

woraus

$$\frac{z_1}{y_1} = \frac{C\sin\theta - C_1 \cos\theta}{C_2}$$

folgt.

Wenn nun zuerst θ ein spitzer Winkel ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\text{tang}\, i = \frac{z_1}{y_1},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\text{tang}\, i = \frac{C\sin\theta - C_1 \cos\theta}{C_2}.$$

Da in diesem Falle $\sin\theta, \cos\theta, \text{tang}\,\theta$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$\sin\theta = \frac{\text{tang}\,\theta}{\sqrt{1 + \text{tang}\,\theta^2}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}\,\theta^2}};$$

also nach 6):

$$\sin\theta = -\frac{\frac{C}{C_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}};$$

und folglich, wie leicht erhellet, wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist:

$$\sin\theta = \mp\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}}, \cos\theta = \pm\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$C\sin\theta - C_1\cos\theta = \mp\frac{C^2+C_1^2}{\sqrt{C^2+C_1^2}} = \mp\sqrt{C^2+C_1^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1^2}}{C_2}.$$

Wenn ferner θ ein stumpfer Winkel ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\operatorname{tang} i = -\frac{z_1}{y_1},$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} i = -\frac{C\sin\theta - C_1\cos\theta}{C_2}.$$

Da in diesem Falle $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{tang}\theta$ respective positiv, negativ, negativ ist, so ist

$$\sin\theta = -\frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\theta^2}}, \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\theta^2}};$$

also nach 6):

$$\sin\theta = -\frac{\frac{C}{C_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}}, \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}};$$

und folglich, wenn man wieder die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist:

$$\sin\theta = \pm\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1{}^2}},\ \cos\theta = \mp\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1{}^2}};$$

also:

$$C\sin\theta - C_1\cos\theta = \pm\frac{C^2+C_1{}^2}{\sqrt{C^2+C_1{}^2}} = \pm\sqrt{C^2+C_1{}^2};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\text{tang}\, i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{C_2}.$$

Also ist immer, θ mag ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein,

$$7)\ \ldots\ldots\ \text{tang}\, i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{C_2},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist.

Durch die beiden Formeln:

$$8)\ \ldots\ \text{tang}\,\theta = -\frac{C}{C_1},\ \text{tang}\, i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{C_2};$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist, ist die Lage der Ebene der Bahn des Körpers m im Raume vollkommen bestimmt, wenn die drei Constanten C, C_1, C_2 bekannt sind.

Nach 7) ist:

$$\sin i^2 = \frac{C^2+C_1{}^2}{C+C_1{}^2+C_2{}^2},\ \cos i^2 = \frac{C_2{}^2}{C+C_1{}^2+C_2{}^2}.$$

Setzen wir nun

$$9)\ \ldots\ldots\ K = \sqrt{C^2+C_1{}^2+C_2{}^2},$$

wo also K eine positive Grösse bezeichnet, so ist, weil $\sin i$ immer positiv ist, $\cos i$ mit $\text{tang}\, i$ stets einerlei Vorzeichen hat, nach dem Obigen offenbar:

$$\sin i = \frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{K},\ \cos i = \mp\frac{C_2}{K}$$

mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Ist θ ein spitzer Winkel, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\sin\theta = \mp \frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}}, \cos\theta = \pm \frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$\sin\theta\sin i = \mp \frac{C}{K}, \cos\theta\sin i = \pm \frac{C_1}{K}.$$

Ist θ ein stumpfer Winkel, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\sin\theta = \pm \frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}}, \cos\theta = \mp \frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$\sin\theta\sin i = \pm \frac{C}{K}, \cos\theta\sin i = \mp \frac{C_1}{K}.$$

Folglich ist

10) $C = \mp K\sin\theta\sin i, C_1 = \pm K\cos\theta\sin i, C_2 = \mp K\cos i$

oder

10*) $C = \pm K\sin\theta\sin i, C_1 = \mp K\cos\theta\sin i, C_2 = \mp K\cos i$

jenachdem θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, natürlich immer die oberen oder die unteren Zeichen genommen, jenachdem C_1 eine positive oder eine negative Grösse ist.

Aus der Form der Gleichung

$$Cx + C_1y + C_2z = 0$$

geht aber auf der Stelle hervor, dass es, ohne die Allgemeinheit irgend wie zu beeinträchtigen, verstattet ist, C_1 immer als positiv anzunehmen. Unter dieser Vorausssetzung hat man nach 10) und 10*) die Gleichungen:

11) $C = \mp K\sin\theta\sin i, C_1 = \pm K\cos\theta\sin i, C_2 = -K\cos i;$

in denen die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist.

§. 4.

Wenn wir jetzt die drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0$$

nach der Reihe mit

$$2\frac{\partial x}{\partial t},\ 2\frac{\partial y}{\partial t},\ 2\frac{\partial z}{\partial t}$$

multipliciren und dann zu einander addiren, so erhalten wir die Gleichung:

$$2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+2\frac{\mu}{r^3}\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)=0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}=2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right),$$

und, weil $r^2=x^2+y^2+z^2$ ist:

$$r\frac{\partial r}{\partial t}=x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t};$$

also wird die obige Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}+2\mu r^{-2}\frac{\partial r}{\partial t}=0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2\mu\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial t}=0.$$

Bezeichnet daher $\mathfrak{K}$ eine Constante, so ist:

$$12)\quad \ldots\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\frac{2\mu}{r}+\mathfrak{K}=0.$$

Wenn ferner die aus §. 3. bekannten Gleichungen

$$y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}=C,$$

$$z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t}=C_1,$$

$$x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}=C_2$$

quadrirt und dann zu einander addirt werden, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung 9) die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &x^2\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2xy\,\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\ &+y^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right\}-2yz\,\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\\ &+z^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\}-2zx\,\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\end{aligned}\right\}=K^2,$$

also, wenn man auf der linken Seite die Grösse

$$x^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+y^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$

addirt und subtrahirt, die Gleichung:

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

folglich nach dem Obigen:

$$13)\quad .\ .\quad r^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=K^2.$$

Weil nun aber nach 12)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{2\mu}{r}-\varkappa$$

ist, so wird die Gleichung 13):

$$2\mu r-\varkappa r^2-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

oder

$$14)\quad .\ .\ .\ .\quad r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=2\mu r-\varkappa r^2-K^2,$$

oder

$$15)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2=\frac{r^2}{2\mu r-\varkappa r^2-K^2},$$

woraus sich

16) . . . . . $\frac{\partial t}{\partial r} = \pm \frac{r}{\sqrt{2\mu r - \varkappa r^2 - K^2}}$

oder

17) . . . . . $\partial t = \pm \frac{r \partial r}{\sqrt{2\mu r - \varkappa r^2 - K^2}}$

ergiebt, wenn man in diesen Gleichungen die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem wenn

$$t \left\{ \begin{matrix} \text{zunimmt} \\ \text{abnimmt} \end{matrix} \right\} \text{respective } r \left\{ \begin{matrix} \text{zunimmt} \\ \text{abnimmt} \end{matrix} \right\},$$

oder wenn

$$t \left\{ \begin{matrix} \text{zunimmt} \\ \text{abnimmt} \end{matrix} \right\} \text{respective } r \left\{ \begin{matrix} \text{abnimmt} \\ \text{zunimmt} \end{matrix} \right\},$$

was in jedem Falle besonders entschieden werden muss.

§. 5.

In der Ebene der Bahn des Körpers m wollen wir uns jetzt von M aus eine beliebige gerade Linie gezogen denken, die wir der Kürze wegen die Axe nennen werden, und wollen den Winkel, welchen zur Zeit t der Vector r des Körpers m mit dieser Axe einschliesst, indem wir diesen Winkel von der Axe an nach einer solchen Richtung hin fortwährend wachsen lassen, dass er mit der Zeit t gleichzeitig zunimmt und abnimmt, durch V, den diesen Winkel messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise aber durch v bezeichnen. Lassen wir dann die Zeit t um Δt wachsen, so wächst v um Δv, und r verändert sich um Δr. Das Quadrat der die Endpunkte der Vectoren r und $r+\Delta r$ mit einander verbindenden Sehne der Bahn ist

$$r^2 + (r+\Delta r)^2 - 2r(r+\Delta r)\cos \Delta v = 4r(r+\Delta r)\sin \tfrac{1}{2}\Delta v^2 + \Delta r^2.$$

Das Quadrat dieser Sehne ist aber auch $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Daher ist

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 4r(r+\Delta r)\sin \tfrac{1}{2}\Delta v^2 + \Delta r^2,$$

also

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 = r(r+\Delta r)\left(\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta v}{\frac{1}{2}\Delta v}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2,$$

und folglich, wenn man, indem man sich Δt der Null nähern lässt, auf beiden Seiten dieser Gleichung zu den Gränzen übergeht:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=r^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

oder

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=r^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung 13), so erhält man die Gleichung

$$r^4\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

woraus sich, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\frac{\partial v}{\partial t}$ und auch K stets positiv ist, die Gleichung

18) . . . . $r^2\frac{\partial v}{\partial t}=K$ oder $r^2\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=K$

ergiebt. Also ist nach 16):

$$\pm r\sqrt{2\mu r-\varkappa r^2-K^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=K,$$

woraus man

19)

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\pm\frac{K}{r\sqrt{2\mu r-\varkappa r^2-K^2}}\quad\text{oder}\quad\partial v=\pm\frac{K\partial r}{r\sqrt{2\mu r-\varkappa r^2-K^2}}$$

erhält, indem die am Ende des vorhergehenden Paragraphen gegebenen Bestimmungen wegen der Vorzeichen natürlich auch jetzt noch ganz ihre Gültigkeit behalten.

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$2\mu r-\varkappa r^2-K^2=r^2\left\{\frac{\mu^2}{K^2}-\varkappa-K^2\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{K^2}\right)^2\right\},$$

und es muss also, weil wegen der Gleichung 14) die Grösse $2\mu r-\varkappa r^2-K^2$ nothwendig positiv ist, offenbar auch

$$\frac{\mu^2}{K^2}-\varkappa=\frac{\mu^2-\varkappa K^2}{K^2}$$

eine positive Grösse sein, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch $\mu^2-\varkappa K^2$ positiv ist. Setzen wir nun

$$2\mu r - \mathfrak{K} r^2 - K^2 = \frac{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}{K^2} r^2 \left\{ 1 - \frac{K^4}{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{K^2} \right)^2 \right\},$$

so wird

$$\sqrt{2\mu r - \mathfrak{K} r^2 - K^2} = \frac{r\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}}{K} \sqrt{1 - \left\{ \frac{K^2}{\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{K^2} \right) \right\}^2},$$

also nach 19):

$$\partial v = \pm \frac{\dfrac{K^2}{\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}} \cdot \dfrac{\partial r}{r^2}}{\sqrt{1 - \left\{ \dfrac{K^2}{\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}} \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{\mu}{K^2} \right) \right\}^2}}.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$20) \quad \ldots \quad w = \frac{K^2}{\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{K^2} \right),$$

so ist, wie man leicht findet:

$$21) \quad \ldots \quad \partial w = - \frac{K^2}{\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}} \cdot \frac{\partial r}{r^2},$$

also nach dem Vorgehenden:

$$22) \quad \ldots \quad \partial v = \mp \frac{\partial w}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

Nach den Lehren der Differentialrechnung ist nun bekanntlich

$$\partial \operatorname{Arc\,cos} w = \mp \frac{\partial w}{\sqrt{1 - w^2}},$$

wenn man in dieser Formel das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\operatorname{Arc\,cos} w$ sich im ersten oder zweiten, oder im dritten oder vierten Quadranten endigt. Also kann man offenbar, wenn ω eine willkührliche Constante bezeichnet, allgemein

$$v = \omega + \operatorname{Arc\,cos} w \quad \text{oder} \quad v - \omega = \operatorname{Arc\,cos} w$$

setzen, woraus sich

$$w = \cos(v - \omega),$$

folglich nach 20)

$$\therefore \frac{K^2}{\sqrt{\mu^2 - \mathfrak{K} K^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{K^2} \right) = \cos(v - \omega),$$

also, wie man sogleich findet:

$$23) \quad \ldots \quad r = \frac{K^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 - \varkappa K^2}\,.\cos(v-\omega)}$$

ergiebt. Auch ist

$$24) \quad \ldots \quad r = \left\{ \frac{\mu}{K^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - \varkappa K^2}}{K^2} \cos(v-\omega) \right\}^{-1},$$

oder, wenn wir

$$25) \quad \ldots \quad A = \frac{\mu}{K^2},\ B = \frac{\sqrt{\mu^2 - \varkappa K^2}}{K^2}$$

setzen, wo A gleiches Vorzeichen mit μ hat, B aber stets positiv ist:

$$26) \quad \ldots \quad r = \{A + B\cos(v-\omega)\}^{-1}.$$

Differentiiren wir diesen Ausdruck von r in Bezug auf v als unabhängige veränderliche Grösse, so erhalten wir:

$$27) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial v} = Br^2 \sin(v-\omega), \\ \dfrac{\partial^2 r}{\partial v^2} = Br^2\cos(v-\omega) + 2B^2r^3 \sin(v-\omega)^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Werth von v, für welchen r ein Minimum wird, durch v_0, so ist wegen der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$\sin(v_0 - \omega) = 0,$$

also, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$v_0 - \omega = 2n\pi \quad \text{oder} \quad v_0 - \omega = (2n+1)\pi.$$

Für $v_0 - \omega = 2n\pi$ ist der entsprechende Werth des zweiten Differentialquotienten von r positiv, dagegen ist für $v_0 - \omega = (2n+1)\pi$ der entsprechende Werth des zweiten Differentialquotienten von r negativ; also ist für das Minimum

$$v_0 - \omega = 2n\pi,\ \omega = v_0 - 2n\pi;$$

folglich nach 26):

$$r = \{A + B\cos(v - v_0 + 2n\pi)\}^{-1}.$$

Weil aber allgemein

$$\cos(v-v_0+2n\pi)=\cos(v-v_0)$$

ist, so ist:

28) . . . . . $r=\{A+B\cos(v-v_0)\}^{-1}$.

Bezeichnen wir den, dem Werthe v_0 von v entsprechenden kleinsten Werth von r durch r_0, so ist nach der vorstehenden Gleichung:

29) . . . . . $r_0=(A+B)^{-1}$.

Nimmt man den kleinsten Vector selbst als Axe an, so ist $v_0=0$, folglich:

30) . . . . . $r=(A+B\cos v)^{-1}$.

Bekanntlich hat A mit der Masse μ gleiches Vorzeichen und B ist stets positiv.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass die Masse μ positiv sei. Dann sind die Grössen A und B beide positiv.

Wenn nun K verschwindet, so ist nach 25):

$$A=\frac{\mu}{K^2},\ B=\frac{\mu}{K^2},\ A=B.$$

Also ist in diesem Falle nach der Theorie der Kegeschnitte*) die Bahn von m um M eine Parabel, deren Brennpunkt M ist.

Wenn $\mathfrak{K}$ nicht verschwindet und positiv ist, so ist nach 25):

$$A=\frac{\mu}{K^2},\quad B=\frac{\mu}{K^2}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{K}K^2}{\mu^2}},\quad A>B.$$

Also ist in diesem Falle nach der Theorie der Kegelschnitte die Bahn von m um M eine Ellipse, deren einer Brennpunkt M ist.

Wenn $\mathfrak{K}$ nicht verschwindet und negativ ist, so ist nach 25):

$$A=\frac{\mu}{K^2},\quad B=\frac{\mu}{K^2}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{K}K^2}{\mu^2}},\quad A<B.$$

Also ist in diesem Falle nach der Theorie der Kegelschnitte die Bahn von m um M der erste Zweig einer Hyperbel, deren einer

---

*) M. s. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. Greifswald und Leipzig. 1857. S. 84. — Archiv der Mathematik und Physik. Theil XVII. S. 54.

Brennpunkt M ist, so dass nämlich die Bahn der Zweig dieser Hyperbel ist, innerhalb welches der Brennpunkt M liegt.

Ferner wollen wir annehmen, dass die Masse μ negativ sei. Dann ist von den Grössen A und B die erste negativ und die zweite positiv.

Wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{2\mu}{r}-\varkappa$$

ist in dem vorliegenden Falle offenbar $\varkappa<0$. Wäre nun $-A\overset{=}{>}B$, also nach 25)

$$\frac{-\mu}{K^2}\overset{=}{>}\frac{\sqrt{\mu^2-\varkappa K^2}}{K^2},$$

so wäre

$$-\mu\overset{=}{>}\sqrt{\mu^2-\varkappa K^2},\quad \mu^2\overset{=}{>}\mu^2-\varkappa K^2;$$

folglich offenbar

$$\varkappa K^2\overset{=}{>}0,\quad \text{also}\quad \varkappa\overset{=}{>}0,$$

was gegen das Obige streitet. Daher ist $-A<B$, und folglich nach der Theorie der Kegelschnitte in diesem Falle, wenn nämlich die Masse μ negativ ist, die Bahn von m um M immer der zweite Zweig einer Hyperbel, deren einer Brennpunkt M ist, so dass nämlich die Bahn der Zweig dieser Hyperbel ist, ausserhalb welches der Brennpunkt M liegt.

§. 6.

Nach 17) ist

$$\partial t=\pm\frac{r\partial r}{\sqrt{2\mu r-\varkappa r^2-K^2}},$$

und ausserdem ergiebt sich aus dem vorhergehenden Paragraphen leicht:

$$\sqrt{2\mu r-\varkappa r^2-K^2}=BKr\sqrt{1-w^2};$$

also ist

$$\partial t = \pm \frac{\partial r}{BK\sqrt{1-w^2}}.$$

Nun ist aber nach 20) und 25):

$$w = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{r} - A\right),$$

also nach 30):

$$w = \cos v;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\partial t = \pm \frac{\partial r}{BK\sqrt{1-\cos v^2}},$$

in welcher Formel nach dem Obigen offenbar das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem $0 < v < \pi$ oder $\pi < v < 2\pi$ ist. Nun ist aber

$$\sin v = \pm\sqrt{1-\cos v^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $0 < v < \pi$ oder $\pi < v < 2\pi$ ist. Also ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\partial t = \frac{\partial r}{BK\sin v}.$$

Weil aber $r = (A + B\cos v)^{-1}$ ist, so ist

$$\partial r = B(A + B\cos v)^{-2}\sin v\,\partial v,$$

folglich:

31) . . . . . $\partial t = \frac{1}{K}\cdot\frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}$,

oder nach 25):

32) . . . . . $\partial t = \sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot\frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}$.

Von nun an wollen wir die Zeiten immer von dem Zeitpunkte an rechnen, wo m seine kleinste Entfernung r_0 von M hat.

§. 7.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun zwei beliebige Zeiten t und t_1, wo t_1 grösser als t sein soll, betrachten, und

wollen annehmen, dass zu diesen Zeiten die Lage des Vectors des Körpers m in Bezug auf dessen kleinsten Vector als Axe durch die auf bekannte Weise genommenen Winkel V und V_1, welche durch die mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen v und v_1 gemessen werden, bestimmt sei. Ferner wollen wir annehmen, dass in dem Zeitintervall $t_1 - t$, welches durch τ bezeichnet werden mag, der Vector von m den ganz bestimmten Sector S_τ beschrieben habe.

Betrachten wir nun zuerst den Fall der Ellipse, so ist in demselben offenbar nach 32) in völliger Allgemeinheit:

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist aber gleichfalls in völliger Allgemeinheit:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2} \int_v^{v_1} r^2 \partial v,$$

also nach 30):

$$S_\tau = \tfrac{1}{2} \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden in diesem Falle in völliger Allgemeinheit:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau.$$

Im Falle der Parabel und Hyperbel müssen wir die folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn zuerst $0 < v < \pi$, $0 < v < \pi_1$ ist, so ist nach 32) offenbar:

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

und nach dem schon vorher angewandten Satze der analytischen Geometrie:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2} \int_v^{v_1} r^2 \partial v,$$

also nach 30):

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau.$$

Wenn ferner $\pi < v < 2\pi$, $\pi < v_1 < 2\pi$ ist, so ist nach 32) offenbar

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

und nach demselben Satze der analytischen Geometrie ist in diesem Falle augenscheinlich

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi-v} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi-v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}.$$

Setzen wir $v = 2\pi - u$, also $\partial v = -\partial u$, $\cos v = \cos u$, so ist

$$\frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = -\frac{\partial u}{(A+B\cos u)^2},$$

und folglich, weil für $v = 0$, $= 2\pi - v$ respective $u = 2\pi$, $= v$ ist:

$$\int_0^{2\pi-v} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = -\int_{2\pi}^{v} \frac{\partial u}{(A+B\cos u)^2}$$

oder

$$\int_0^{2\pi-v} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = \int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

und natürlich ganz ebenso:

$$\int_0^{2\pi-v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = \int_{v_1}^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} - \tfrac{1}{2}\int_{v_1}^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}.$$

Nun ist aber

$$\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \int_{v_1}^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

also offenbar

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau.$$

Wenn endlich $\pi < v < 2\pi$, $0 < v_1 < \pi$ ist, so ist, wie leicht erhellet, nach 32):

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_0^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi-v} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2};$$

folglich nach dem Obigen offenbar:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau.$$

Hieraus sehen wir also, dass in völliger Allgemeinheit für alle Kegelschnitte unter den gemachten Voraussetzungen

$$33) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau$$

ist, oder auch

$$34) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 2\sqrt{\frac{A}{M+m}} \cdot S_\tau.$$

§. 8.

Zwischen den Grössen A, B und den Constanten $\mathfrak{K}, K$ finden nach 25) die folgenden Beziehungen Statt:

$$A=\frac{\mu}{K^2},\quad B=\frac{\sqrt{\mu^2-\varkappa K^2}}{K^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, da bekanntlich K eine positive Grösse ist:

35) . . . . . $K=\sqrt{\frac{\mu}{A}}$

und

36) . . . . . $\varkappa=\frac{\mu(A^2-B^2)}{A}$.

Für die Parabel ist bekanntlich $A=B$, also $\varkappa=0$. Bezeichnen wir nun für die beiden anderen Kegelschnitte die beiden Halbaxen und den Parameter durch a,b,p, so ist nach der Theorie der Kegelschnitte für die Ellipse bekanntlich:

$$A=\frac{2}{p}=\frac{a}{b^2},\quad B=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2};$$

also $\varkappa=\frac{\mu}{a}$. Für die Hyperbel ist, wenn man für den ersten Zweig die oberen, für den zweiten Zweig die unteren Zeichen nimmt:

$$A=\pm\frac{2}{p}=\pm\frac{a}{b^2},\quad B=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2};$$

also $\varkappa=\mp\frac{\mu}{a}$.

Nach 12) ist nun

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\frac{2\mu}{r}+\varkappa=0,$$

also:

36) . . $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\mu\left(\frac{2}{r}\mp\frac{1}{a}\right)=0,$

wenn man für die Ellipse und den zweiten Zweig der Hyperbel das obere, für den ersten Zweig der Hyperbel das untere Zeichen nimmt, und für die Parabel $\frac{1}{a}$ als verschwindend oder a als unendlich gross betrachtet.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Körpers m in seiner

Bahn am Ende der Zeit t durch $\mathfrak{v}$, so ist nach den Lehren der Mechanik bekanntlich

$$\mathfrak{v} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2},$$

also nach 36):

$$37) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{v} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} \mp \frac{1}{a}\right)},$$

die Zeichen wie vorher genommen.

Für die Ellipse, Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel ist daher respective:

$$\mathfrak{v} < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}, \quad \mathfrak{v} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}, \quad \mathfrak{v} > \sqrt{\frac{2\mu}{r}}.$$

Für den zweiten Zweig der Hyperbel ist bekanntlich μ negativ, weshalb wir in diesem Falle

$$\mathfrak{v} = \sqrt{-\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right)}$$

setzen wollen, woraus sich ergiebt, dass immer

$$\mathfrak{v} < \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$$

ist. Auch findet man leicht, dass in diesem Falle, jenachdem

$$r < 4a, \quad r = 4a, \quad r > 4a$$

ist, respective

$$\mathfrak{v} < \sqrt{-\frac{2\mu}{r}}, \quad \mathfrak{v} = \sqrt{-\frac{2\mu}{r}}, \quad \mathfrak{v} > \sqrt{-\frac{2\mu}{r}}$$

ist.

§. 9.

Von jetzt an wollen wir grösserer Einfachheit und Bestimmtheit wegen annehmen, dass die Massen M und m, und also auch die Grössen μ und A positiv seien, weil dieser Fall für die Anwendungen, welche wir von diesen allgemeinen Lehren späterhin zu machen beabsichtigen, uns zunächst interessirt.

Nach 34) ist in völliger Allgemeinheit

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{M+m}} \cdot S_\tau,$$

also unter der vorher gemachten Voraussetzung:

$$\tau = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{M}.\sqrt{1+\frac{m}{M}}} \cdot S_\tau,$$

und folglich:

38) . . . . . $\sqrt{M} = \frac{2\sqrt{A}}{\tau\sqrt{1+\frac{m}{M}}} \cdot S_\tau,$

oder, weil nach der Theorie der Kegelschnitte, wenn p den Parameter bezeichnet, für die Parabel, Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel allgemein $A = \frac{2}{p}$ ist:

39) . . . . . $\sqrt{M} = \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{p}.\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau.$

Hieraus sieht man, dass für jedes System von Körpern, die sich sämmtlich um den Centralkörper M bewegen, also z. B. für das System der um die Sonne als ihren Centralkörper sich bewegenden Planeten und Cometen, die Grösse

$$\frac{2\sqrt{A}}{\tau\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau = \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{p}.\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau$$

eine Constante ist, welche wir durch k bezeichnen, und daher

40) . . $k = \frac{2\sqrt{A}}{\tau\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau = \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{p}.\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau$

setzen wollen, wo sich nach dem Vorhergehenden von selbst versteht, dass

41) . . . . . $k = \sqrt{M}, \quad k^2 = M$

ist.

Wenn einer der in Rede stehenden Körper, dessen Masse m sein mag, um den Centralkörper M eine Ellipse beschreibt, wie z. B. die Erde um die Sonne, und E und T den Flächeninhalt

der ganzen Ellipse und die ganze Umlaufszeit in derselben bezeichnen, so ist nach 40):

$$k = \frac{2E\sqrt{A}}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Sind aber a und b die beiden Halbaxen der Ellipse, so ist nach der Theorie der Kegelschnitte bekanntlich

$$A = \frac{a}{b^2},\ E = ab\pi;$$

also $E\sqrt{A} = a^{\frac{1}{2}}\pi$, und folglich nach dem Vorhergehenden:

42) . . . . . $k = \frac{2a^{\frac{1}{2}}\pi}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$

Nimmt man a, etwa die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, als Längeneinheit an, so ist

43) . . . . . $k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$

Beschreiben zwei Körper m und m_1 um die beiden Centralkörper M und M_1 Ellipsen, deren Halbaxen a, b und a_1, b_1 sind, so ist, wenn die Flächenräume dieser Ellipsen durch E und E_1, die Umlaufszeiten in denselben durch T und T_1 bezeichnet werden, überdies

$$A = \frac{a}{b^2},\quad A_1 = \frac{a_1}{{b_1}^2}$$

gesetzt wird, nach dem Obigen:

$$T = \frac{2E\sqrt{A}}{\sqrt{M+m}},\quad T_1 = \frac{2E_1\sqrt{A_1}}{\sqrt{M_1+m_1}};$$

also auf ähnliche Art wie vorher:

$$T = \frac{2a^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{M+m}},\quad T_1 = \frac{2a_1^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{M_1+m_1}};$$

und folglich

$$\frac{T^2}{a^3} : \frac{{T_1}^2}{{a_1}^3} = M_1+m_1 : M+m$$

oder

$$\frac{T^2}{a^3} : \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{M_1}{M} + \frac{m_1}{M} : 1 + \frac{m}{M},$$

also

$$1 + \frac{m}{M} = \frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{a_1^3}\left(\frac{M_1}{M} + \frac{m_1}{M}\right),$$

und folglich

$$44) \quad \ldots \quad \frac{m}{M} = \frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{a_1^3}\left(\frac{M_1}{M} + \frac{m_1}{M}\right) - 1.$$

Ist nun $M_1 = m$, d. h. ist M der Centralkörper für m, und m der Centralkörper für m_1, wie z. B. die Sonne, die Erde und der Mond, so ist

$$\frac{m}{M} = \frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{a_1^3}\left(\frac{m}{M} + \frac{m_1}{M}\right) - 1,$$

woraus sich

$$45) \quad \ldots \quad \frac{m}{M} = \frac{\frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{a_1^3} \cdot \frac{m_1}{M} - 1}{1 - \frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{a_1^3}}$$

ergiebt.

Kann man aber den Bruch $\frac{m_1}{M}$ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so geht vorstehende Formel in die folgende über:

$$46) \quad \ldots \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{\frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{a_1^3} - 1}$$

oder

$$47) \quad \ldots \quad \frac{m}{M} = \frac{T^2 a_1^3}{T_1^2 a^3 - T^2 a_1^3},$$

mittelst welcher Formeln der Bruch $\frac{m}{M}$ aus a, a_1, T, T_1 gefunden werden kann; dann kann man aber auch die Constante k mittelst der Formeln 42) oder 43) finden.

Für das System der Planeten und Cometen in Bezug auf die Sonne als Centralkörper hat man auf diese Weise gefunden:

$$k = 0{,}01720209895$$

welche Zahl man die Constante des Sonnensystems zu nennen pflegt, wobei die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längeneinheit zu Grunde liegt.

Bis auf eilf und zehn Decimalstellen genau ist:

$$k = 0{,}01720209895$$
$$k^2 = 0{,}00029591227$$
$$k^3 = 0{,}00005090310$$
$$k^4 = 0{,}00000008756$$
$$k^5 = 0{,}00000000151$$
$$k^6 = 0{,}00000000003$$

und

$$\log k = 0{,}2355814414 - 2$$
$$\log . k^2 = 0{,}4711628828 - 4$$
$$\log . k^3 = 0{,}7067443242 - 6$$
$$\log . k^4 = 0{,}9423257656 - 8$$
$$\log . k^5 = 0{,}1779072070 - 9$$
$$\log . k^6 = 0{,}4134886484 - 11.$$

Bis auf sieben Decimalstellen abgekürzt ist aber:

$$\log k = 0{,}2355814 - 2$$
$$\log . k^2 = 0{,}4711629 - 4$$
$$\log . k^3 = 0{,}7067443 - 6$$
$$\log . k^4 = 0{,}9423258 - 8$$
$$\log . k^5 = 0{,}1779072 - 9$$
$$\log . k^6 = 0{,}4134886 - 11.$$

§. 10.

Wir wenden uns nun zunächst noch zu einigen allgemeinen Betrachtungen, welche für alles Folgende von der grössten Wichtigkeit sind, und daher hier der sorgfältigsten Beachtung empfohlen werden müssen.

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden $\frac{1}{r} = \mathfrak{r}$ setzen. Weil nun nach 30)

$$r = (A + B\cos v)^{-1}$$

ist, so ist

$$r = A + B\cos v.$$

Ferner ist nach 18)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{r^2}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = Kr^2.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch successive Differentiation die folgenden Formeln:

$$r = A + B\cos v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Kr^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -B\sin v\,\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2Kr\,\frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -B\left\{\sin v\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \cos v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = 2K\left\{r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -B\left\{\sin v\,\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + 3\cos v\,\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sin v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3\right\},$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 2K\left\{r\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} + 3\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right\},$$

$$\frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = -B\left\{\sin v\,\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + 4\cos v\,\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + 3\cos v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)^2 - 6\sin v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \cos v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^4\right\},$$

u. s. w.

und schliesst aus diesen Formeln, die man leicht weiter fortsetzen kann, sogleich, dass überhaupt die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda v}{\partial t^\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^\lambda r}{\partial t^\lambda}$$

in Bezug auf die Grösse K von der Ordnung λ sind, d. h. in allen ihren Gliedern die Potenz K^λ enthalten. Weil nun aber nach 25) und 41)

$$K^2 = \frac{\mu}{A} = \frac{M(1+\frac{m}{M})}{A} = \frac{k^2(1+\frac{m}{M})}{A},$$

also

$$48) \quad \ldots\ldots\ldots \quad K = k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}$$

ist, so sind die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda v}{\partial t^\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^\lambda \mathfrak{r}}{\partial t^\lambda}$$

offenbar auch in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ, und enthalten also in allen Gliedern die Potenz k^λ.

Aus $r = \mathfrak{r}^{-1}$ erhält man leicht durch successive Differentiation:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\{\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - 2\mathfrak{r}^{-3}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2\},$$

$$\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\{\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial^3 \mathfrak{r}}{\partial t^3} - 6\mathfrak{r}^{-3}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + 6\mathfrak{r}^{-4}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^3\},$$

$$\frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = -\{\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial^4 \mathfrak{r}}{\partial t^4} - 8\mathfrak{r}^{-3}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 \mathfrak{r}}{\partial t^3} - 6\mathfrak{r}^{-3}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2}\right)^2 + 36\mathfrak{r}^{-4}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - 24\mathfrak{r}^{-5}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^4\},$$

u. s. w.

und überzeugt sich hieraus sogleich, dass auch der Differentialquotient $\frac{\partial^\lambda r}{\partial t^\lambda}$ in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ ist.

Weil endlich

$$\frac{\partial . \mathfrak{r}^3}{\partial t} = 3\mathfrak{r}^2\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 . \mathfrak{r}^3}{\partial t^2} = 3\{\mathfrak{r}^2\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + 2\mathfrak{r}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2\},$$

$$\frac{\partial^3 . r^3}{\partial t^3} = 3\{r^2 \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} + 6r \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^3\},$$

$$\frac{\partial^4 . r^3}{\partial t^4} = 3\{r^2 \frac{\partial^4 r}{\partial t^4} + 8r \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} + 6r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right)^2 + 12\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\},$$

u. s. w.

ist, so ist klar, dass auch der Differentialquotient $\frac{\partial^\lambda . r^3}{\partial t^\lambda}$ in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ ist.

Nach 3) ist bekanntlich

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\mu z}{r^3};$$

also, weil

$$\mu = M + m = M(1 + \frac{m}{M}) = k^2(1 + \frac{m}{M})$$

ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k^2(1 + \frac{m}{M}) r^3 x,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2(1 + \frac{m}{M}) r^3 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2(1 + \frac{m}{M}) r^3 z.$$

Also ist nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung, wenn man die Binomial-Coëfficienten auf gewöhnliche Weise bezeichnet:

$$\frac{\partial^\lambda x}{\partial t^\lambda} = -k^2(1 + \frac{m}{M})\{r^3 \frac{\partial^{\lambda-2} x}{\partial t^{\lambda-2}} + (\lambda-2)_1 \frac{\partial . r^3}{\partial t} \cdot \frac{\partial^{\lambda-3} x}{\partial t^{\lambda-3}} + (\lambda-2)_2 \frac{\partial^2 . r^3}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^{\lambda-4} x}{\partial t^{\lambda-4}} + \text{u. s. w.} + (\lambda-2)_{\lambda-3} \frac{\partial^{\lambda-3} . r^3}{\partial t^{\lambda-3}} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + (\lambda-2)_{\lambda-2} \frac{\partial^{\lambda-2} . r^3}{\partial t^{\lambda-2}} x\},$$

$$\frac{\partial^\lambda y}{\partial t^\lambda} = -k^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\left\{r^3\frac{\partial^{\lambda-2}y}{\partial t^{\lambda-2}} + (\lambda-2)_1\frac{\partial . r^3}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{\lambda-3}y}{\partial t^{\lambda-3}}\right.$$
$$+(\lambda-2)_2\frac{\partial^2 . r^3}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^{\lambda-4}y}{\partial t^{\lambda-4}}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$+(\lambda-2)_{\lambda-3}\frac{\partial^{\lambda-3}.r^3}{\partial t^{\lambda-3}}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$\left.+(\lambda-2)_{\lambda-2}\frac{\partial^{\lambda-2}.r^3}{\partial t^{\lambda-2}}\,y\right\},$$

$$\frac{\partial^\lambda z}{\partial t^\lambda} = -k^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\left\{r^3\frac{\partial^{\lambda-2}z}{\partial t^{\lambda-2}} + (\lambda-2)_1\frac{\partial . r^3}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{\lambda-3}z}{\partial t^{\lambda-3}}\right.$$
$$+(\lambda-2)_2\frac{\partial^2 . r^3}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^{\lambda-4}z}{\partial t^{\lambda-4}}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$+(\lambda-2)_{\lambda-3}\frac{\partial^{\lambda-3}.r^3}{\partial t^{\lambda-3}}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$\left.+(\lambda-2)_{\lambda-2}\frac{\partial^{\lambda-2}.r^3}{\partial t^{\lambda-2}}\,z\right\}.$$

Kann man nun beweisen, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t}$$

in Bezug auf die Grösse k von der ersten Ordnung sind, so schliesst man, weil nach dem Vorhergehenden die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

in Bezug auf die Grösse k von der zweiten Ordnung sind, hieraus und aus dem Obigen leicht, dass überhaupt die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda x}{\partial t^\lambda},\ \frac{\partial^\lambda y}{\partial t^\lambda},\ \frac{\partial^\lambda z}{\partial t^\lambda}$$

in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ sind.

Bekanntlich ist

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

und folglich durch Differentiation:

$$x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}=r\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Ferner ist nach 4):

$$y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}=C,$$

$$z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t}=C_1,$$

$$x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}=C_2.$$

Bestimmt man mittelst dieser Gleichungen und der zwei vorhergehenden Gleichungen die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t};$$

so erhält man leicht:

$$49)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t}&=\frac{C_1z-C_2y}{r}+\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\\ \frac{\partial y}{\partial t}&=\frac{C_2x-Cz}{r^2}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\\ \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{Cy-C_1x}{r^2}+\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Nach 11) ist aber:

$$C=\mp K\sin\theta\sin i,\ C_1=\pm K\cos\theta\sin i,\ C_2=-K\cos i;$$

also nach 48):

$$C=\mp k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}\sin\theta\sin i,$$

$$C_1=\pm k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}\cos\theta\sin i,$$

$$C_2=-k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}\cos i;$$

indem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist; also sind C, C_1, C_2 in Bezug auf die Grösse k von der ersten Ordnung, und da nun nach dem Vorhergehenden auch $\frac{\partial r}{\partial t}$ in Bezug auf diese Grösse von der ersten Ordnung ist, so sind nach 49) in der That auch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$$

in Bezug auf die Grösse k von der ersten Ordnung, wie bewiesen werden sollte.

Wenn wir die Gleichungen 49) quadriren und dann zu einander addiren, so erhalten wir nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{(C^2+C_1^2+C_2^2)r^2-(Cx+C_1y+C_2z)^2}{r^4}+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2,$$

also nach 9) und 5):

$$50) \quad . \quad \mathfrak{v}^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{K^2}{r^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2.$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen 49) leicht:

$$51) \quad . \quad . \quad \begin{cases} C_1\frac{\partial z}{\partial t}-C_2\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{K^2x}{r^2}+\frac{C_1z-C_2y}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}, \\ C_2\frac{\partial x}{\partial t}-C\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{K^2y}{r^2}+\frac{C_2x-Cz}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}, \\ C\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{K^2z}{r^2}+\frac{Cy-C_1x}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}; \end{cases}$$

und wenn man nun die Gleichungen 49) differentiirt, so erhält man in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen leicht die folgenden Ausdrücke:

$$52) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \frac{\partial^2x}{\partial t^2}=-\frac{K^2x}{r^4}+\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial^2r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2y}{\partial t^2}=-\frac{K^2y}{r^4}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial^2r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2z}{\partial t^2}=-\frac{K^2y}{r^4}+\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial^2r}{\partial t^2} \end{cases}$$

oder nach 48):

$$53) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k^2 \frac{1+\frac{m}{M}}{A} \cdot \frac{x}{r^4} + \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 \frac{1+\frac{m}{M}}{A} \cdot \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2 \frac{1+\frac{m}{M}}{A} \cdot \frac{z}{r^4} + \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$54) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})\frac{y}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})\frac{z}{r^3} \end{cases}$$

ist, so erhält man, wenn man diese Ausdrücke in die vorhergehenden Gleichungen einführt, die folgende Formel:

$$55) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = k^2(1+\frac{m}{M})\frac{1-Ar}{Ar^3}.$$

Hieraus erhält man durch fernere Differentiation:

$$56) \quad \ldots \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -k^2(1+\frac{m}{M}) \cdot \frac{3-2Ar}{Ar^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$$

und

$$57) \quad \frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = k^2(1+\frac{m}{M}) \left\{ \frac{6(2-Ar)}{Ar^5} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - \frac{3-2Ar}{Ar^4} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right\},$$

welche Differentialquotienten man auch leicht noch weiter entwickeln könnte.

§. 11.

Weil nach 30) bekanntlich

$$r = (A + B\cos v)^{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (A + B\cos v)^{-2} . B\sin v = \frac{B\sin v}{(A + B\cos v)^2},$$

und folglich, weil nach 18)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{r^2}$$

ist:

$$58) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial r}{\partial t} = KB\sin v$$

oder

$$59) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{kB}{\sqrt{A}}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} \cdot \sin v.$$

Setzt man aber für die Ellipse und Hyperbel respective

$$60) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

und

$$61) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

und nimmt im Folgenden für den ersten Zweig der Hyperbel immer die oberen, für den zweiten Zweig der Hyperbel die unteren Zeichen, so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten

$$B = \pm Ae,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$62) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial r}{\partial t} = ke\sqrt{\pm A(1 + \frac{m}{M})} . \sin v.$$

Weil, wie man sogleich findet,

$$1 - Ar = \frac{B\cos v}{A + B\cos v} = Br\cos v$$

ist, so ist nach 55):

$$63) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = K^2 B\cos v(A + B\cos v)^2$$

oder

$$64) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = k^2\frac{B}{A}(1 + \frac{m}{M})\cos v(A + B\cos v)^2,$$

oder auch für die Ellipse und Hyperbel, immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$65) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \pm k^2 e\left(1+\frac{m}{M}\right)\cos v(A+B\cos v)^2.$$

Wenn man die Gleichung 63) unter der Form

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = K^2 B r^{-2}\cos v$$

darstellt, und dann differentiirt, so erhält man:

$$\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -K^2 B\left(2r^{-3}\cos v\frac{\partial r}{\partial t}+r^{-2}\sin v\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

also, wenn man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = KB\sin v,\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{r^2}$$

setzt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$66) \quad \ldots \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{K^3 B}{r^3}\sin v(A+3B\cos v),$$

oder

$$67) \quad \ldots \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{k^3 B}{r^3}\left(\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\sin v(A+3B\cos v),$$

also für die Ellipse und Hyperbel:

$$68) \quad \ldots \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = \mp\frac{k^3 Ae}{r^3}\left(\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\sin v(A+3B\cos v.)$$

Will man B ganz eliminiren, so ist, immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher:

$$69) \quad . \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = ke\sqrt{\pm A\left(1+\frac{m}{M}\right)}.\sin v, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \pm k^2 A^2 e\left(1+\frac{m}{M}\right)\cos v(1\pm e\cos v)^2, \\ \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = \mp\frac{k^3 A^2 e}{r^3}\left(\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\sin v(1\pm 3e\cos v). \end{cases}$$

Für die Parabel muss man $A = B = \frac{2}{p}$ setzen, wenn p den Parameter bezeichnet. Dies giebt nach dem Vorhergehenden:

$$70) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = KA \sin v = k\sqrt{A(1+\frac{m}{M})}.\sin v = k\sqrt{\frac{2}{p}(1+\frac{m}{M})}.\sin v;$$

ferner:

$$71) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = K^2A^3\cos v(1+\cos v)^2 = 4K^2A^3\cos v\cos\tfrac{1}{2}v^4,$$

oder

$$72) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 4k^2A^2(1+\frac{m}{M})\cos v\cos\tfrac{1}{2}v^4,$$

oder

$$73) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{16k^2}{p^2}(1+\frac{m}{M})\cos v\cos\tfrac{1}{2}v^4;$$

endlich ist

$$74) \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{K^3A^2}{r^3}\sin v\,(1+3\cos v),$$

oder

$$75) \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{k^3\sqrt{A}}{r^3}(1+\frac{m}{M})^{\frac{1}{2}}\sin v(1+3\cos v),$$

oder

$$76) \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{k^3\sqrt{2}}{r^3\sqrt{p}}(1+\frac{m}{M})^{\frac{1}{2}}\sin v(1+3\cos v).$$

§. 12.

Die besonders wichtigen Fälle der Ellipse und Parabel wollen wir nun noch der folgenden Betrachtung unterwerfen.

Ueber der Hauptaxe der Ellipse, deren Mittelpunkt C sein mag*), als Durchmesser denke man sich einen Kreis beschrieben, und bezeichne den Brennpunkt der Ellipse, in welchem sich der Körper M befindet, durch M. Die beiden Scheitel der Hauptaxe der Ellipse seien P und A, so dass P der dem Brennpunkte M zu-

---

*) Eine Figur beizufügen wird nicht nöthig sein. Erforderlichen Falls würde sich dieselbe ein Jeder selbst zeichnen können.

nächst liegende Scheitel ist. Der Ort des Körpers m zur Zeit t in der Ellipse sei m. Von m denke man sich ein Perpendikel auf die Hauptaxe gefällt, und verlängere selbiges über m hinaus so weit, bis der beschriebene Kreis in m' geschnitten wird. Dann ziehe man Cm' und Mm, und bezeichne den von Cm' mit CP eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von CP an nach derselben Seite hin von 0 bis 360° zählt, nach welcher hin der von Mm mit MP eingeschlossene Winkel v von MP an von 0 bis 360° gezählt wird, durch u*); so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$a\cos u = \sqrt{a^2-b^2} + r\cos v,$$

oder, wenn wie früher

$$77) \quad \ldots \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

gesetzt wird:

$$78) \quad \ldots \quad a\cos u = ae + r\cos v$$

oder

$$79) \quad \ldots \quad r\cos v = a(\cos u - e).$$

Nun ist aber nach 30)

$$r = (A + B\cos v)^{-1},$$

also, wenn man dies in die vorhergehende Gleichung einführt:

$$\cos v = \frac{aA(\cos u - e)}{1 - aB(\cos u - e)},$$

woraus sich

$$A + B\cos v = \frac{A}{1 - aB(\cos u - e)} = \frac{A}{1 + eaB - aB\cos u},$$

folglich nach dem Obigen

$$r = \frac{1+eaB}{A} - \frac{aB}{A}\cos u$$

ergiebt. Nun ist aber bekanntlich

---

*) Eigentlich sind v und u die, die entsprechenden Winkel messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise. (S. oben.)

$$A = \frac{a}{b^2}, \quad B = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} = \frac{ea}{b^2};$$

also, wie man leicht findet:

$$e = \frac{B}{A}, \quad \frac{1 + eaB}{A} = a;$$

folglich:

80) . . . . . $r = a(1 - e\cos u)$.

Nach 79) und 80) ist:

81) . . . . . $\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$,

woraus sich mittelst leichter Rechnung

$$\sin v^2 = \frac{(1 - e^2)\sin u^2}{(1 - e\cos u)^2},$$

also, weil offenbar $\sin u$ und $\sin v$ immer gleiche Vorzeichen haben und $1 - e\cos u$ stets positiv ist,

82) . . . . . $\sin v = \frac{\sin u \sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos u}$

ergiebt.

Aus der Gleichung 81) folgt ferner mittelst leichter Rechnung:

$$1 \mp \cos v = \frac{(1 \pm e)(1 \mp \cos u)}{1 - e\cos u},$$

also:

$$\sin \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{1 + e}{1 - e\cos u} \sin \tfrac{1}{2} u^2,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{1 - e}{1 - e\cos u} \cos \tfrac{1}{2} u^2;$$

woraus sich durch Division

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u^2$$

oder

$$(1 - e)\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2 = (1 + e)\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u^2$$

ergiebt. Offenbar ist aber immer zugleich $0 < v < \pi$, $0 < u < \pi$ und $\pi < v < 2\pi$, $\pi < u < 2\pi$, also zugleich $0 < \frac{1}{2} v < \frac{1}{2}\pi$, $0 < \frac{1}{2} u < \frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2} v < \pi$, $\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2} u < \pi$, woraus sich ergiebt, dass $\sin \frac{1}{2} v$

und $\sin\frac{1}{2}u$, $\cos\frac{1}{2}v$ und $\cos\frac{1}{2}u$, $\text{tang}\frac{1}{2}v$ und $\text{tang}\frac{1}{2}u$ immer gleiche Vorzeichen haben. Also ist nach dem Obigen:

$$83) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}v = \sin\frac{1}{2}u\sqrt{\frac{1+e}{1-e\cos u}}, \\ \cos\frac{1}{2}v = \cos\frac{1}{2}u\sqrt{\frac{1-e}{1-e\cos u}} \end{cases}$$

und

$$84) \quad \ldots \quad \text{tang}\frac{1}{2}v.\sqrt{1-e} = \text{tang}\frac{1}{2}u.\sqrt{1+e}.$$

Rechnen wir wie gewöhnlich die Zeit t von dem Zeitpunkte an, wo der Körper m seine kleinste Entfernung von M hat, so ist nach 32):

$$t = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_0^v \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Differentiirt man aber die Gleichung 81), so erhält man:

$$\sin v \partial v = \frac{(1-e^2)\sin u}{(1-e\cos u)^2}\partial u,$$

also nach 82):

$$85) \quad \ldots \ldots \quad \partial v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\partial u.$$

Ferner ist

$$A + B\cos v = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e\cos u)},$$

also

$$\frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = a^2\sqrt{1-e^2}.(1-e\cos u)\partial u,$$

und folglich, weil u und v zugleich verschwinden:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = a^2\sqrt{1-e^2}.(1-e\cos u)\partial u.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$t = \frac{a^2\sqrt{(1-e^2)A}}{\sqrt{\mu}}(u - e\sin u).$$

Nun ist aber

$$A = \frac{a}{b^2}, \quad 1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad (1-e^2)A = \frac{1}{a};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$86) \quad \ldots\ldots \quad t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}(u - e\sin u),$$

oder, weil

$$\mu = M + m = M\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

und nach 41) bekanntlich $k = \sqrt{M}$ ist:

$$87) \quad \ldots\ldots \quad t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}(u - e\sin u)$$

oder

$$88) \quad \ldots\ldots \quad \frac{k\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}{a^{\frac{3}{2}}}\, t = u - e\sin u.$$

Die drei im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen:

$$89) \quad \ldots\ldots \begin{cases} t = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}(u - e\sin u), \\ r = a(1 - e\cos u), \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u; \end{cases}$$

durch welche t, r, v sämmtlich durch u ausgedrückt werden, sind für die elliptische Bewegung der Weltkörper um die Sonne von der grössten Wichtigkeit.

Für die Parabel müssen wir

$$A = B = \frac{2}{p}$$

setzen; also ist in diesem Falle:

$$90) \quad \ldots \quad r = \frac{1}{A(1 + \cos v)} = \frac{1}{2A\cos\tfrac{1}{2}v^2} = \frac{p}{4\cos\tfrac{1}{2}v^2}.$$

Ferner ist für $0 < v < \pi$ bekanntlich, wenn t die seit dem Zeitpunkte, wo der Körper m seine kleinste Entfernung von M hatte, verflossene Zeit bezeichnet:

$$t = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_0^v \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

also für $A = B$:

$$t = \frac{1}{A^2}\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_0^v \frac{\partial v}{4\cos\frac{1}{2}v^4} = \frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}} \int_0^v \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel der Integralrechnung ist aber

$$\int \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4} = \frac{\sin\frac{1}{2}v}{3\cos\frac{1}{2}v^3} + \frac{2}{3}\int \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^2}, \quad \int \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v};$$

also, wie man leicht findet:

$$\int_0^v \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3,$$

folglich nach dem Obigen:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3).$$

Bezeichnet, wenn $\pi < v < 2\pi$ ist, t die Zeit, welche bis zu dem Zeitpunkte verfliesst, wo der Körper m seine kleinste Entfernung von M hat, so ist offenbar:

$$t = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

also nach dem Obigen:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}} \int_v^{2\pi} \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}.$$

Nun ist aber allgemein

$$\int \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3,$$

also

$$\int_v^{2\pi} \frac{\partial \frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4} = -\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3,$$

folglich

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3).$$

Bezeichnen wir nun aber, jenachdem $0 < v < \pi$ oder $\pi < v < 2\pi$ ist, die seit dem Zeitpunkte, wo m seine kleinste Entfernung von M hat, verflossene, oder die bis zu diesem Zeitpunkte noch verfliessende Zeit, indem wir zugleich diese Zeit im ersten Falle als positiv, im zweiten Falle als negativ betrachten, durch t, so ist nach dem Vorhergehenden in völliger Allgemeinheit:

$$91) \quad \ldots \quad t = \frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v^3)$$

oder, weil $A = \frac{2}{p}$ ist:

$$92) \quad \ldots \quad t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\mu}} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v^3),$$

oder:

$$93) \quad \ldots \quad t = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v^3).$$

Weil

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{M} . \sqrt{1 + \frac{m}{M}} = k \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

ist, so ist:

$$94) \quad \ldots \quad t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4k\sqrt{2(1 + \frac{m}{M})}} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v^3)$$

oder

$$95) \quad \ldots \quad t = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2k\sqrt{1 + \frac{m}{M}}} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v)^3,$$

welche Formeln besonders für die Theorie der Cometen von sehr grosser Wichtigkeit sind.

Nach dem berühmten Lambert'schen oder Euler'schen Theorem von der Quadratur parabolischer Sectoren *) ist, wenn dem Sector S_τ die Vectoren r_1, r_2 und die dazwischen liegende Sehne $s_{1,2}$ entsprechen:

$$S_\tau = \tfrac{1}{12} \sqrt{\frac{p}{2}} . \{(r_1 + r_2 + s_{1,2})^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s_{1,2})^{\frac{3}{2}}\},$$

*) Archiv. Thl. XVI. S. 439.

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der von den Vectoren r_1, r_2 nach der Seite der Parabel hin eingeschlossene Winkel ein concaver oder ein convexer Winkel ist. Weil nun nach 34) allgemein

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{M+m}}.S_\tau = \frac{2\sqrt{2}}{k\sqrt{p}.\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.S_\tau$$

ist, so ist für die Parabel:

$$96)\quad .\quad \tau = \frac{1}{6k\sqrt{1+\frac{m}{M}}}\{(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}} \mp (r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}}\},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der von den Vectoren r_1, r_2 nach der Seite der Parabel hin eingeschlossene Winkel ein concaver oder ein convexer Winkel ist.

Anhang.

Es giebt noch eine Klasse sehr merkwürdiger allgemein gültiger Formeln, zu deren Entwickelung sich im Vorhergehenden noch keine Gelegenheit dargeboten hat. Diese nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthen Formeln will ich daher in diesem Anhange noch entwickeln.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von der Sonne als dem Anfange der Coordinaten nach dem Perihelium gezogene gerade Linie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, wollen wir respective durch λ, μ, ν bezeichnen. Dann ist, weil offenbar $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Cosinus der 180° nicht übersteigenden Winkel sind, welche der Vector r mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, wie man sogleich übersieht, in völliger Allgemeinheit:

$$97)\quad .\ .\ .\ .\ \cos v = \frac{x}{r}\cos\lambda + \frac{y}{r}\cos\mu + \frac{z}{r}\cos\nu,$$

oder:

$$98)\quad .\ .\ .\ .\ x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = r\cos v.$$

Nun ist aber nach 30) allgemein:

$$r = (A + B\cos v)^{-1},$$

also:

$$99) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos v = \frac{1 - Ar}{Br},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$100) \quad \ldots \quad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \frac{1 - Ar}{B},$$

also, wenn man differentiirt:

$$101) \quad \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial t}\cos\lambda + \frac{\partial y}{\partial t}\cos\mu + \frac{\partial z}{\partial t}\cos\nu = -\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{1 - Ar}{B} = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu,$$

$$-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\cos\lambda + \frac{\partial y}{\partial t}\cos\mu + \frac{\partial z}{\partial t}\cos\nu$$

erhält man sehr leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{1 - Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = \left(z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial z}\right)\cos\nu - \left(x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}\right)\cos\mu,$$

$$\frac{1 - Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = \left(x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}\right)\cos\lambda - \left(y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cos\nu,$$

$$\frac{1 - Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = \left(y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cos\mu - \left(z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t}\right)\cos\lambda;$$

folglich nach 4):

$$102) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{1 - Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = C_1\cos\nu - C_2\cos\mu, \\ \frac{1 - Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = C_2\cos\lambda - C\cos\nu, \\ \frac{1 - Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = C\cos\mu - C_1\cos\lambda. \end{cases}$$

Quadrirt man diese Gleichungen auf beiden Seiten und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

ist, sehr leicht die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$=C^2+C_1^2+C_2^2-(C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu)^2,$$

und folglich nach 9):

$$\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$=K^2-(C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu)^2.$$

Entwickelt man nun die Summe der Quadrate auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man für dieselbe, weil

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}=r\frac{\partial r}{\partial t}$$

ist, zuvörderst leicht den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{1-Ar}{B}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{A^2r^2}{B^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+2\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdot r\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2,$$

also nach 50) den Ausdruck:

$$\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2K^2+\left\{\left(\frac{1-Ar}{B}\right)^2+\frac{A^2r^2}{B^2}+2\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{Ar}{B}\right\}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2K^2+\frac{1}{B^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{1-Ar}{Br}=\cos v,\ \text{und nach 58):}\quad \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}=K\sin v;$$

also ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\\+&\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\\+&\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\end{aligned}\right\}=K^2,$$

so dass man also nach dem Obigen die Gleichung

$$K^2=K^2-(C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu)^2$$

hat, aus welcher sich die Gleichung

103) . . . . $C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu=0$

ergiebt.

Daher haben wir jetzt die drei folgenden Gleichungen:

104)
$$\left\{\begin{aligned}&x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=\frac{1-Ar}{B},\\&\frac{\partial x}{\partial t}\cos\lambda+\frac{\partial y}{\partial t}\cos\mu+\frac{\partial z}{\partial t}\cos\nu=-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\\&C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu=0.\end{aligned}\right.$$

Um aus diesen Gleichungen $\cos\lambda$ zu bestimmen, multiplicire man dieselben nach der Reihe mit

$$C_2\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial z}{\partial t},\quad C_1z-C_2y,\quad y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}$$

und addire sie dann zu einander, so erhält man:

$$\left\{x\left(C_2\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial z}{\partial t}\right)+\frac{\partial x}{\partial t}(C_1z-C_2y)+C\left(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\}\cos\lambda$$
$$=\frac{1-Ar}{B}\left(C_2\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial z}{\partial t}\right)-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}(C_1z-C_2y).$$

Führt man in den Factor von $\cos\lambda$ auf der linken Seite des Gleichheitszeichens für C, C_1, C_2 ihre Ausdrücke aus 4) ein, so erhält man für diesen Factor leicht den folgenden Ausdruck:

$$x^2\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2xy\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+y^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2yz\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$+z^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\}-2zx\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$=(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$
$$=r^2\left\{\frac{K^2}{r^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right\}-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

und die obige Gleichung zur Bestimmung von $\cos\lambda$ erhält daher die folgende Form:

$$K^2\cos\lambda = \frac{1-Ar}{B}\left(C_2\frac{\partial y}{\partial t} - C_1\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}(C_1 z - C_2 y).$$

Führt man nun auch in die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens für C_1 und C_2 ihre Ausdrücke aus 4) ein, so erhält man für diese Grösse leicht den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1-Ar}{B}\left\{x\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right] - \left(x\frac{\partial x}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}\right\}$$

$$- \frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\left\{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial x}{\partial t} - x\left(x\frac{\partial x}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\left\{\frac{K^2x}{r^2} + x\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - r\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right\}$$

$$- \frac{Ar}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\left(r\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial r}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{K^2x}{r^2} + \left(\frac{1-Ar}{B} + \frac{Ar}{B}\right)x\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$- \left(\frac{1-Ar}{B} + \frac{Ar}{B}\right)r\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{K^2x}{r^2} + \frac{1}{B}\left\{x\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - r\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right\}$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{K^2x}{r^2} + BK^2x\sin v^2 - Kr\frac{\partial x}{\partial t}\sin v$$

$$= \frac{K^2x}{r^2}\left(\frac{1-Ar}{B} + Br^2\sin v^2\right) - Kr\frac{\partial x}{\partial t}\sin v$$

Nun ist aber

$$\sin v^2 = 1 - \left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2,$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{1-Ar}{B} + Br^2\sin v^2 = r\,\frac{A-(A^2-B^2)r}{B};$$

also obige Grösse:

$$\frac{K^2x}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - Kr\frac{\partial x}{\partial t}\sin v.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$K\cos\lambda = \frac{Kx}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\frac{\partial x}{\partial t}\sin v,$$

und man hat also jetzt überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$105)\quad \left\{\begin{aligned} K\cos\lambda &= \frac{Kx}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\frac{\partial x}{\partial t}\sin v,\\ K\cos\mu &= \frac{Ky}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\frac{\partial y}{\partial t}\sin v,\\ K\cos\nu &= \frac{Kz}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\frac{\partial z}{\partial t}\sin v; \end{aligned}\right.$$

oder:

$$106)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{x}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \frac{r}{K}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sin v,\\ \cos\mu &= \frac{y}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \frac{r}{K}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sin v,\\ \cos\nu &= \frac{z}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \frac{r}{K}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sin v; \end{aligned}\right.$$

oder nach 35), wenn wir $M+m$ für das dortige μ setzen:

$$107)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{x}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\sqrt{\frac{A}{M+m}}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sin v,\\ \cos\mu &= \frac{y}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\sqrt{\frac{A}{M+m}}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sin v,\\ \cos\nu &= \frac{z}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\sqrt{\frac{A}{M+m}}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sin v. \end{aligned}\right.$$

Sind die Massen positiv, so ist nach 48):

$$K = k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}},$$

und, wenn man den Bruch $\frac{m}{M}$ vernachlässigt:

$$K = \frac{k}{\sqrt{A}};$$

also unter diesen Voraussetzungen nach 106):

$$108)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \frac{x}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \frac{r\sqrt{A}}{k}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sin v, \\ \cos\mu = \frac{y}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \frac{r\sqrt{A}}{k}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sin v, \\ \cos\nu = \frac{z}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \frac{r\sqrt{A}}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sin v; \end{cases}$$

wo nach dem Obigen bekanntlich

$$109)\quad \ldots\quad \sin v = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2}$$

ist, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem v zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegt

Im Falle der Ellipse ist bekanntlich:

$$A = \frac{a}{b^2},\quad B = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{ea}{b^2};$$

also

$$A^2 - B^2 = \frac{1}{b^2},$$

und folglich:

$$\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} = \frac{a-r}{ea}.$$

Folglich ist in diesem Falle:

$$110)\quad \begin{cases} e\cos\lambda = \frac{x}{r}\cdot\frac{a-r}{a} - \frac{er\sqrt{a}}{kb}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sin v, \\ e\cos\mu = \frac{y}{r}\cdot\frac{a-r}{a} - \frac{er\sqrt{a}}{kb}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sin v, \\ e\cos\nu = \frac{z}{r}\cdot\frac{a-r}{a} - \frac{er\sqrt{a}}{kb}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sin v; \end{cases}$$

wo bekanntlich $b = a\sqrt{1-e^2}$ ist.

Ferner ist

$$1-\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2 = \frac{2Ar-1-(A^2-B^2)r^2}{B^2r^2}$$

$$= \frac{2ar-b^2-r^2}{B^2b^2r^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2-(a^2-2ar+r^2)}{B^2b^2r^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2-(a-r)^2}{B^2b^2r^2}$$

$$= \frac{a^2\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}}{B^2b^2r^2}$$

$$= \frac{b^2\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}}{e^2r^2},$$

und folglich:

$$\frac{er\sqrt{a}}{b}\sin v = \pm\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem v zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegt. Also ist mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens:

111)
$$\begin{cases} e\cos\lambda = \frac{x}{r}\cdot\frac{a-r}{a} \mp \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}}, \\ e\cos\mu = \frac{y}{r}\cdot\frac{a-r}{a} \mp \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}}, \\ e\cos\nu = \frac{z}{r}\cdot\frac{a-r}{a} \mp \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}}; \end{cases}$$

oder:

112)
$$\begin{cases} e\cos\lambda \pm \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}} - \frac{x}{r}\cdot\frac{a-r}{a} = 0, \\ e\cos\mu \pm \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}} - \frac{y}{r}\cdot\frac{a-r}{a} = 0, \\ e\cos\nu \pm \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sqrt{a\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\}} - \frac{z}{r}\cdot\frac{a-r}{a} = 0. \end{cases}$$

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Bahn eines Weltkörpers aus drei geocentrischen Beobachtungen desselben.

I.

Fundamental-Gleichungen.

§. 1.

Die Zeiten der drei Beobachtungen, aufsteigend nach ihrer Grösse geordnet, seien t_1, t_2, t_3; die Zeitintervalle $t_3 - t_2$, $t_3 - t_1$, $t_2 - t_1$ sollen aber respective durch τ_1, τ_2, τ_3 bezeichnet werden, so dass also

$$\tau_1 = t_3 - t_2, \quad \tau_2 = t_3 - t_1, \quad \tau_3 = t_2 - t_1$$

ist. Die Sonne nehmen wir als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an; die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der xy; der positive Theil der Axe der x sei nach dem Anfangspunkte der Längen, der positive Theil der Axe der y sei nach dem neunzigsten Grade der Längen, und der positive Theil der Axe der z sei nach dem Nordpole der Ekliptik gerichtet. Die den Zeiten

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3$$

entsprechenden Coordinaten des Weltkörpers, dessen Bahn bestimmt werden soll, in diesem Systeme, und seine denselben Zeiten entsprechenden Vectoren seien

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3$$

und

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3.$$

Die den obigen Zeiten entsprechenden geocentrischen Längen und Breiten des Weltkörpers seien

$$\lambda_1, \beta_1; \quad \lambda_2, \beta_2; \quad \lambda_3, \beta_3.$$

Die Coordinaten der Erde für dieselben Zeiten seien

$$X_1, Y_1; \quad X_2, Y_2; \quad X_3, Y_3;$$

ihre heliocentrischen Längen und ihre Vectoren seien

$$L_1, L_2, L_3 \text{ und } R_1, R_2, R_3.$$

Die heliocentrischen Längen der Erde können immer leicht aus den geocentrischen Längen der Sonne, welche bekanntlich die Tafeln geben, gefunden werden, weil, wenn $\mathfrak{L}$ eine beliebige geocentrische Länge der Sonne und L die entsprechende heliocentrische Länge der Erde ist, offenbar immer

$$L = \mathfrak{L} \pm 180^0$$

ist, wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\mathfrak{L}$ kleiner oder grösser als 180^0 ist.

Die den Zeitintervallen

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3$$

entsprechenden Sehnen der zu bestimmenden Bahn unsers Weltkörpers, und die denselben Zeitintervallen entsprechenden Sehnen der Erdbahn wollen wir respective durch

$$s_1, s_2, s_3 \text{ und } S_1, S_2, S_3$$

bezeichnen.

Endlich sollen die den Zeitintervallen

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3$$

entsprechenden Dreiecksflächen der zu bestimmenden Bahn unsers Weltkörpers und der Erdbahn, welche respective von den Seiten

$$s_1 r_2 r_3, \quad r_1 s_2 r_3, \quad r_1 r_2 s_3$$

und

$$S_1 R_2 R_3, \quad R_1 S_2 R_3, \quad R_1 R_2 S_3$$

eingeschlossen werden, durch

$$f_1, f_2, f_3 \text{ und } F_1, F_2, F_3$$

bezeichnet werden.

§. 2.

Nach einem sehr bekannten Satze der analytischen Geometrie ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den folgenden Formeln auf einander:

$$2F_1 = \pm(X_2 Y_3 - X_3 Y_2),$$
$$2F_2 = \pm(X_1 Y_3 - X_3 Y_1),$$
$$2F_3 = \pm(X_1 Y_2 - X_2 Y_1);$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$1) \quad \ldots \quad \begin{cases} F_1 X_1 - F_2 X_2 + F_3 X_3 = 0, \\ F_1 Y_1 - F_2 Y_2 + F_3 Y_3 = 0. \end{cases}$$

Die Projectionen von

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3$$

auf der Ebene der xy seien respective

$$\overset{xy}{f_1}, \quad \overset{xy}{f_2}, \quad \overset{xy}{f_3};$$

so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander nach demselben Satze wie vorher:

$$2\overset{xy}{f_1} = \pm(x_2 y_3 - x_3 y_2),$$
$$2\overset{xy}{f_2} = \pm(x_1 y_3 - x_3 y_1),$$
$$2\overset{xy}{f_3} = \pm(x_1 y_2 - x_2 y_1);$$

woraus sich ganz auf dieselbe Weise wie vorher die beiden Gleichungen

$$\overset{xy}{f_1} x_1 - \overset{xy}{f_2} x_2 + \overset{xy}{f_3} x_3 = 0,$$
$$\overset{xy}{f_1} y_1 - \overset{xy}{f_2} y_2 + \overset{xy}{f_3} y_3 = 0$$

ergeben. Nach einem allgemein bekannten geometrischen Satze ist aber

$$f_1 : f_2 : f_3 = \overset{xy}{f_1} : \overset{xy}{f_2} : \overset{xy}{f_3},$$

also nach dem Vorhergehenden auch:

$$f_1 x_1 - f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0,$$
$$f_1 y_1 - f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0.$$

Stellt man nun die so eben für die Ebene der xy angestellte Betrachtung ganz in derselben Weise auch für die Ebenen der yz und zx an, so erhält man überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$2) \quad \ldots\ldots \begin{cases} f_1 x_1 - f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0, \\ f_1 y_1 - f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0, \\ f_1 z_1 - f_2 z_2 + f_3 z_3 = 0. \end{cases}$$

§. 3.

Legen wir jetzt zu jeder der drei Zeiten t_1, t_2, t_3 durch die Erde als Anfang ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem, und bezeichnen in diesen drei Systemen die Coordinaten des Weltkörpers, dessen Bahn bestimmt werden soll, zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 respective durch

$$x_1', y_1', z_1'; \quad x_2', y_2', z_2'; \quad x_3', y_3', z_3';$$

so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + x_1', \quad y_1 = Y_1 + y_1', \quad z_1 = z_1'; \\ x_2 &= X_2 + x_2', \quad y_2 = Y_2 + y_2', \quad z_2 = z_2'; \\ x_3 &= X_3 + x_3', \quad y_3 = Y_3 + y_3', \quad z_3 = z_3'; \end{aligned}$$

aus denen sich, in Verbindung mit 2), die drei folgenden Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} f_1(X_1 + x_1') - f_2(X_2 + x_2') + f_3(X_3 + x_3') &= 0, \\ f_1(Y_1 + y_1') - f_2(Y_2 + y_2') + f_3(Y_3 + y_3') &= 0, \\ f_1 z_1' - f_2 z_2' + f_3 z_3' &= 0. \end{aligned}$$

Multipliciren wir nun diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$y_2' z_3' - y_3' z_2', \quad z_2' x_3' - z_3' x_2', \quad x_2' y_3' - x_3' y_2';$$

dann nach der Reihe mit

$$y_3' z_1' - y_1' z_3', \quad z_3' x_1' - z_1' x_3', \quad x_3 y_1' - x_1' y_3';$$

endlich nach der Reihe mit

$$y_1' z_2' - y_2' z_1', \quad z_1' x_2' - z_2' x_1', \quad x_1' y_2' - x_2' y_1';$$

und addiren sie in jedem einzelnen Falle zu einander, so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$3) \quad \Omega = x_1'(y_2' z_3' - y_3' z_2') + x_2'(y_3' z_1' - y_1' z_3') + x_3'(y_1' z_2' - y_2' z_1')$$

gesetzt wird, sehr leicht die drei folgenden Gleichungen:

4)

$$\begin{aligned}
0 = \quad & f_1\Omega + f_1\{X_1(y_2'z_3' - y_3'z_2') + Y_1(z_2'x_3' - z_3'x_2')\} \\
& - f_2\{X_2(y_2'z_3' - y_3'z_2') + Y_2(z_2'x_3' - z_3'x_2')\} \\
& + f_3\{X_3(y_2'z_3' - y_3'z_2') + Y_3(z_2'x_3' - z_3'x_2')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = - & f_2\Omega + f_1\{X_1(y_3'z_1' - y_1'z_3') + Y_1(z_3'x_1' - z_1'x_3')\} \\
& - f_2\{X_2(y_3'z_1' - y_1'z_3') + Y_2(z_3'x_1' - z_1'x_3')\} \\
& + f_3\{X_3(y_3'z_1' - y_1'z_3') + Y_3(z_3'x_1' - z_1'x_3')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \quad & f_3\Omega + f_1\{X_1(y_1'z_2' - y_2'z_1') + Y_1(z_1'x_2' - z_2'x_1')\} \\
& - f_2\{X_2(y_1'z_2' - y_2'z_1') + Y_2(z_1'x_2' - z_2'x_1')\} \\
& + f_3\{X_3(y_1'z_2' - y_2'z_1') + Y_3(z_1'x_2' - z_2'x_1')\}.
\end{aligned}$$

Auch hat man nach l) offenbar die drei folgenden Gleichungen:

5)

$$\begin{aligned}
0 = \quad & F_1\{X_1(y_2'z_3' - y_3'z_2') + Y_1(z_2'x_3' - z_3'x_2')\} \\
& - F_2\{X_2(y_2'z_3' - y_3'z_2') + Y_2(z_2'x_3' - z_3'x_2')\} \\
& + F_3\{X_3(y_2'z_3' - y_3'z_2') + Y_3(z_2'x_3' - z_3'x_2')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \quad & F_1\{X_1(y_3'z_1' - y_1'z_3') + Y_1(z_3'x_1' - z_1'x_3')\} \\
& - F_2\{X_2(y_3'z_1' - y_1'z_3') + Y_2(z_3'x_1' - z_1'x_3')\} \\
& + F_3\{X_3(y_3'z_1' - y_1'z_3') + Y_3(z_3'x_1' - z_1'x_3')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \quad & F_1\{X_1(y_1'z_2' - y_2'z_1') + Y_1(z_1'x_2' - z_2'x_1')\} \\
& - F_2\{X_2(y_1'z_2' - y_2'z_1') + Y_2(z_1'x_2' - z_2'x_1')\} \\
& + F_3\{X_3(y_1'z_2' - y_2'z_1') + Y_3(z_1'x_2' - z_2'x_1')\}.
\end{aligned}$$

§. 4.

Offenbar ist nun:

$$6) \quad \ldots \quad \begin{cases} X_1 = R_1 \cos L_1, & Y_1 = R_1 \sin L_1; \\ X_2 = R_2 \cos L_2, & Y_2 = R_2 \sin L_2; \\ X_3 = R_3 \cos L_3, & Y_3 = R_3 \sin L_3; \end{cases}$$

und wenn wir die sogenannten curtirten Entfernungen unsers Weltkörpers von der Erde zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 durch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnen, so ist offenbar:

$$7) \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1' = \varrho_1 \cos\lambda_1,\ y_1' = \varrho_1 \sin\lambda_1,\ z_1' = \varrho_1 \operatorname{tang}\beta_1; \\ x_2' = \varrho_2 \cos\lambda_2,\ y_2' = \varrho_2 \sin\lambda_2,\ z_2' = \varrho_2 \operatorname{tang}\beta_2; \\ x_3' = \varrho_3 \cos\lambda_3,\ y_3' = \varrho_3 \sin\lambda_3,\ z_3' = \varrho_3 \operatorname{tang}\beta_3. \end{array} \right.$$

Was nun zuerst die Grösse Ω betrifft, so ist nach 3) und 7):

$$\Omega = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda_1 (\sin\lambda_2 \operatorname{tang}\beta_3 - \sin\lambda_3 \operatorname{tang}\beta_2) \\ + \cos\lambda_2 (\sin\lambda_3 \operatorname{tang}\beta_1 - \sin\lambda_1 \operatorname{tang}\beta_3) \\ + \cos\lambda_3 (\sin\lambda_1 \operatorname{tang}\beta_2 - \sin\lambda_2 \operatorname{tang}\beta_1) \end{array} \right\},$$

also offenbar:

$$\Omega = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \{\sin(\lambda_3-\lambda_2)\operatorname{tang}\beta_1 - \sin(\lambda_3-\lambda_1)\operatorname{tang}\beta_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1)\operatorname{tang}\beta_3\},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$8) \quad \bar{\omega} = \sin(\lambda_3-\lambda_2)\operatorname{tang}\beta_1 - \sin(\lambda_3-\lambda_1)\operatorname{tang}\beta_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1)\operatorname{tang}\beta_3$$

oder

$$8^*) \quad \bar{\omega} = -\{\sin(\lambda_2-\lambda_3)\operatorname{tang}\beta_1 + \sin(\lambda_3-\lambda_1)\operatorname{tang}\beta_2 + \sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{tang}\beta_3\}$$

setzen:

$$9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Omega = \varrho_1\varrho_2\varrho_3\bar{\omega}.$$

Wenn man von der Sonne oder einem anderen beliebigen Punkte im Raume aus Linien zieht, welche mit den zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 von der Erde aus nach dem Weltkörper gezogenen Geraden parallel und gleich gerichtet sind, und auf diesen Linien von dem in Rede stehenden Punkte aus Stücke abschneidet, welche den entsprechenden Entfernungen des Weltkörpers von der Erde gleich sind, so sind die Endpunkte dieser abgeschnittenen Stücke und der Punkt, von welchem aus die drei Linien gezogen worden sind, die vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide, deren sechsfacher körperlicher Inhalt der absolute Werth der Grösse Ω ist *). Also ist nach 9) die Grösse $\bar{\omega}$ der sechsfache Inhalt dieser Pyramide,

*) M. s. den Ausdruck 3) von Ω und meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. I. Leipzig. 1839. S. 257.

durch das Product der drei curtirten Entfernungen des Weltkörpers von der Erde oder durch das von diesen drei curtirten Entfernungen als in einer Ecke zusammenstossenden Kanten gebildete rechtwinklige Parallelepipedon dividirt, wobei es sich natürlich nur um den absoluten Werth der Grösse $\bar{\omega}$ handelt.

Ferner ist, wenn wir der Kürze wegen

$$10)\quad . \quad \begin{cases} A_1 = \sin(L_1 - \lambda_3)\,\mathrm{tang}\,\beta_2 - \sin(L_1 - \lambda_2)\,\mathrm{tang}\,\beta_3, \\ A_2 = \sin(L_2 - \lambda_3)\,\mathrm{tang}\,\beta_2 - \sin(L_2 - \lambda_2)\,\mathrm{tang}\,\beta_3, \\ A_3 = \sin(L_3 - \lambda_3)\,\mathrm{tang}\,\beta_2 - \sin(L_3 - \lambda_2)\,\mathrm{tang}\,\beta_3; \end{cases}$$

$$11)\quad . \quad \begin{cases} B_1 = \sin(L_1 - \lambda_1)\,\mathrm{tang}\,\beta_3 - \sin(L_1 - \lambda_3)\,\mathrm{tang}\,\beta_1, \\ B_2 = \sin(L_2 - \lambda_1)\,\mathrm{tang}\,\beta_3 - \sin(L_2 - \lambda_3)\,\mathrm{tang}\,\beta_1, \\ B_3 = \sin(L_3 - \lambda_1)\,\mathrm{tang}\,\beta_3 - \sin(L_3 - \lambda_3)\,\mathrm{tang}\,\beta_1; \end{cases}$$

$$12)\quad . \quad \begin{cases} C_1 = \sin(L_1 - \lambda_2)\,\mathrm{tang}\,\beta_1 - \sin(L_1 - \lambda_1)\,\mathrm{tang}\,\beta_2, \\ C_2 = \sin(L_2 - \lambda_2)\,\mathrm{tang}\,\beta_1 - \sin(L_2 - \lambda_1)\,\mathrm{tang}\,\beta_2, \\ C_3 = \sin(L_3 - \lambda_2)\,\mathrm{tang}\,\beta_1 - \sin(L_3 - \lambda_1)\,\mathrm{tang}\,\beta_2 \end{cases}$$

setzen, nach den Gleichungen 4) und 5), wie man leicht findet:

$$13)\quad . \quad \begin{cases} \bar{\omega} f_1 \varrho_1 + A_1 R_1 f_1 - A_2 R_2 f_2 + A_3 R_3 f_3 = 0, \\ -\bar{\omega} f_2 \varrho_2 + B_1 R_1 f_1 - B_2 R_2 f_2 + B_3 R_3 f_3 = 0, \\ \bar{\omega} f_3 \varrho_3 + C_1 R_1 f_1 - C_2 R_2 f_2 + C_3 R_3 f_3 = 0 \end{cases}$$

und

$$14)\quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} A_1 R_1 F_1 - A_2 R_2 F_2 + A_3 R_3 F_3 = 0, \\ B_1 R_1 F_1 - B_2 R_2 F_2 + B_3 R_3 F_3 = 0, \\ C_1 R_1 F_1 - C_2 R_2 F_2 + C_3 R_3 F_3 = 0. \end{cases}$$

§. 5.

Die Coordinaten der Sonne in Bezug auf die zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 durch die Erde als Anfang gelegten Coordinatensysteme sind offenbar:

$$-R_1 \cos L_1, \quad -R_1 \sin L_1;$$

$$-R_2 \cos L_2, \quad -R_2 \sin L_2;$$

$$-R_3 \cos L_3, \quad -R_3 \sin L_3;$$

also haben wir nach den Lehren der analytischen Geometrie die drei folgenden Gleichungen:

$$(x_1' + R_1 \cos L_1)^2 + (y_1' + R_1 \sin L_1)^2 + z_1'^2 = r_1^2,$$
$$(x_2' + R_2 \cos L_2)^2 + (y_2' + R_2 \sin L_2)^2 + z_2'^2 = r_2^2,$$
$$(x_3' + R_3 \cos L_3)^2 + (y_3' + R_3 \sin L_3)^2 + z_3'^2 = r_3^2;$$

folglich nach 7):

$$(\varrho_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1)^2 + (\varrho_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1)^2 + \varrho_1^2 \operatorname{tang}\beta_1^2 = r_1^2,$$
$$(\varrho_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2)^2 + (\varrho_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2)^2 + \varrho_2^2 \operatorname{tang}\beta_2^2 = r_2^2,$$
$$(\varrho_2 \cos\lambda_3 + R_3 \cos L_3)^2 + (\varrho_3 \sin\lambda_3 + R_3 \sin L_3)^2 + \varrho_3^2 \operatorname{tang}\beta_3^2 = r_3^2;$$

woraus man, wenn man die Quadrate entwickelt, mittelst einiger allgemein bekannten goniometrischen Relationen sogleich erhält:

$$15)\ \ \begin{cases} R_1^2 + 2\varrho_1 R_1 \cos(L_1 - \lambda_1) + \varrho_1^2 \sec\beta_1^2 = r_1^2, \\ R_2^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2 \sec\beta_2^2 = r_2^2, \\ R_3^2 + 2\varrho_3 R_3 \cos(L_3 - \lambda_3) + \varrho_3^2 \sec\beta_3^2 = r_3^2. \end{cases}$$

Ferner hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$s_1^2 = (x_2' - x_3')^2 + (y_2' - y_3')^2 + (z_2' - z_3')^2,$$
$$s_2^2 = (x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2 + (z_3' - z_1')^2,$$
$$s_3^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2;$$

also nach 7):

$$s_1^2 = (\varrho_2 \cos\lambda_2 - \varrho_3 \cos\lambda_3)^2 + (\varrho_2 \sin\lambda_2 - \varrho_3 \sin\lambda_3)^2 + (\varrho_2 \operatorname{tang}\beta_2 - \varrho_3 \operatorname{tang}\beta_3)^2,$$
$$s_2^2 = (\varrho_3 \cos\lambda_3 - \varrho_1 \cos\lambda_1)^2 + (\varrho_3 \sin\lambda_3 - \varrho_1 \sin\lambda_1)^2 + (\varrho_3 \operatorname{tang}\beta_3 - \varrho_1 \operatorname{tang}\beta_1)^2,$$
$$s_3^2 = (\varrho_1 \cos\lambda_1 - \varrho_2 \cos\lambda_2)^2 + (\varrho_1 \sin\lambda_1 - \varrho_2 \sin\lambda_2)^2 + (\varrho_1 \operatorname{tang}\beta_1 - \varrho_2 \operatorname{tang}\beta_2)^2;$$

woraus man nach Entwickelung der Quadrate erhält:

$$s_1^2 = \varrho_2^2 \sec\beta_2^2 + \varrho_3^2 \sec\beta_3^2 - 2\varrho_2\varrho_3 \{\cos(\lambda_2 - \lambda_3) + \operatorname{tang}\beta_2 \operatorname{tang}\beta_3\},$$
$$s_2^2 = \varrho_3^2 \sec\beta_3^2 + \varrho_1^2 \sec\beta_1^2 - 2\varrho_3\varrho_1 \{\cos(\lambda_3 - \lambda_1) + \operatorname{tang}\beta_3 \operatorname{tang}\beta_1\},$$
$$s_3^2 = \varrho_1^2 \sec\beta_1^2 + \varrho_2^2 \sec\beta_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \{\cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \operatorname{tang}\beta_1 \operatorname{tang}\beta_2\};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$16)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \sin\beta_2\sin\beta_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3\cos(\lambda_2-\lambda_3),\\ \cos\theta_2 &= \sin\beta_3\sin\beta_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1\cos(\lambda_3-\lambda_1),\\ \cos\theta_3 &= \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\lambda_1-\lambda_2) \end{aligned}\right.$$

setzen:

$$17)\quad \left\{\begin{aligned} s_1^2 &= (\varrho_2\sec\beta_2)^2 + (\varrho_3\sec\beta_3)^2 - 2(\varrho_2\sec\beta_2)(\varrho_3\sec\beta_3)\cos\theta_1,\\ s_2^2 &= (\varrho_3\sec\beta_3)^2 + (\varrho_1\sec\beta_1)^2 - 2(\varrho_3\sec\beta_3)(\varrho_1\sec\beta_1)\cos\theta_2,\\ s_3^2 &= (\varrho_1\sec\beta_1)^2 + (\varrho_2\sec\beta_2)^2 - 2(\varrho_1\sec\beta_1)(\varrho_2\sec\beta_2)\cos\theta_3; \end{aligned}\right.$$

so dass man also s_1, s_2, s_3 ganz wie die dritten Seiten ebener Dreiecke berechnen kann, deren zwei andere Seiten und davon eingeschlossene Winkel

$$\varrho_2\sec\beta_2,\ \varrho_3\sec\beta_3,\ \theta_1;\quad \varrho_3\sec\beta_3,\ \varrho_1\sec\beta_1,\ \theta_2;\quad \varrho_1\sec\beta_1,\ \varrho_2\sec\beta_2,\ \theta_3$$

sind. Alle Kunstgriffe, deren man sich zur Erleichterung und Abkürzung der Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe in der ebenen Trigonometrie bedient, finden daher auch hier bei der Berechnung der Sehnen s_1, s_2, s_3 Anwendung. Man kann z. B. die obigen Ausdrücke der Quadrate der Sehnen auf die folgende Form bringen:

$$s_1^2 = (\varrho_2\sec\beta_2 - \varrho_3\sec\beta_3)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_1^2 + (\varrho_2\sec\beta_2 + \varrho_3\sec\beta_3)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_1^2,$$

$$s_2^2 = (\varrho_3\sec\beta_3 - \varrho_1\sec\beta_1)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_2^2 + (\varrho_3\sec\beta_3 + \varrho_1\sec\beta_1)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_2^2,$$

$$s_3^2 = (\varrho_1\sec\beta_1 - \varrho_2\sec\beta_2)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_3^2 + (\varrho_1\sec\beta_1 + \varrho_2\sec\beta_2)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_3^2;$$

und berechnet man dann die Hülfswinkel ω_1, ω_2, ω_3 mittelst der Formeln:

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\omega_1 &= \frac{\varrho_2\cos\beta_3 + \varrho_3\cos\beta_2}{\varrho_2\cos\beta_3 - \varrho_3\cos\beta_2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta_1,\\ \operatorname{tang}\omega_2 &= \frac{\varrho_3\cos\beta_1 + \varrho_1\cos\beta_3}{\varrho_3\cos\beta_1 - \varrho_1\cos\beta_3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta_2,\\ \operatorname{tang}\omega_3 &= \frac{\varrho_1\cos\beta_2 + \varrho_2\cos\beta_1}{\varrho_1\cos\beta_2 - \varrho_2\cos\beta_1}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta_3; \end{aligned}\right.$$

so ist, wenn man die absoluten Werthe der Grössen

$$(\varrho_2\sec\beta_2 - \varrho_3\sec\beta_3)\cos\tfrac{1}{2}\theta_1\sec\omega_1,$$

$$(\varrho_3\sec\beta_3 - \varrho_1\sec\beta_1)\cos\tfrac{1}{2}\theta_2\sec\omega_2,$$

$$(\varrho_1\sec\beta_1 - \varrho_2\sec\beta_2)\cos\tfrac{1}{2}\theta_3\sec\omega_3$$

durch

$$\text{val. abs. } (\varrho_2 \sec\beta_2 - \varrho_3 \sec\beta_3) \cos\tfrac{1}{2}\theta_1 \sec\omega_1 ,$$

$$\text{val. abs. } (\varrho_3 \sec\beta_3 - \varrho_1 \sec\beta_1) \cos\tfrac{1}{2}\theta_2 \sec\omega_2 ,$$

$$\text{val. abs. } (\varrho_1 \sec\beta_1 - \varrho_2 \sec\beta_2) \cos\tfrac{1}{2}\theta_3 \sec\omega_3$$

bezeichnet, nach dem Obigen, wie man sogleich übersieht:

$$19)\quad . \quad \begin{cases} s_1 = \text{val. abs. } (\varrho_2 \sec\beta_2 - \varrho_3 \sec\beta_3) \cos\tfrac{1}{2}\theta_1 \sec\omega_1 , \\ s_2 = \text{val. abs. } (\varrho_3 \sec\beta_3 - \varrho_1 \sec\beta_1) \cos\tfrac{1}{2}\theta_2 \sec\omega_2 , \\ s_3 = \text{val. abs. } (\varrho_1 \sec\beta_1 - \varrho_2 \sec\beta_2) \cos\tfrac{1}{2}\theta_3 \sec\omega_3 . \end{cases}$$

Für die Quadrate der Sehnen S_1, S_2, S_3 der Erdbahn hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie die folgenden Ausdrücke:

$$S_1^2 = (R_2 \cos L_2 - R_3 \cos L_3)^2 + (R_2 \sin L_2 - R_3 \sin L_3)^2 ,$$

$$S_2^2 = (R_3 \cos L_3 - R_1 \cos L_1)^2 + (R_3 \sin L_3 - R_1 \sin L_1)^2 ,$$

$$S_3^2 = (R_1 \cos L_1 - R_2 \cos L_2)^2 + (R_1 \sin L_1 - R_2 \sin L_2)^2 ;$$

also, wie man sogleich findet:

$$20)\quad . \quad . \quad \begin{cases} S_1 = \sqrt{R_2^2 + R_3^2 - 2R_2R_3 \cos(L_2 - L_3)} , \\ S_2 = \sqrt{R_3^2 + R_1^2 - 2R_3R_1 \cos(L_3 - L_1)} , \\ S_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(L_1 - L_2)} ; \end{cases}$$

welche Formeln man auf ganz ähnliche Weise wie vorher durch Einführung von Hülfswinkeln zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten kann, was wir hier, als überdies aus der ebenen Trigonometrie hinreichend bekannt, nicht weiter erläutern wollen.

§. 6.

Zu den in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Gleichungen kommen als Fundamental-Gleichungen für unsere ferneren Untersuchungen nun hauptsächlich noch die folgenden, aus der im vorhergehenden Kapitel entwickelten allgemeinen Theorie der Bewegung eines Weltkörpers um die Sonne bekannten Gleichungen:

$$21) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0; \end{cases}$$

welche für jede Zeit t und die derselben entsprechenden Coordinaten x, y, z und den derselben Zeit entsprechenden Vector r unsers Weltkörpers gelten. Was die in diesen Gleichungen vorkommende Grösse μ betrifft, so ist, wenn M die Sonnenmasse und m die Masse unsers um die Sonne sich bewegenden Weltkörpers bezeichnet, bekanntlich

$$\mu = M + m = M(1 + \frac{m}{M}),$$

also, wenn, wie immer k die Constante des Sonnensystems bezeichnet:

$$22) \quad \ldots\ldots \quad \mu = k^2(1 + \frac{m}{M});$$

und die Gleichungen 21) werden daher, wenn man in dieselben die Constante des Sonnensystems einführt:

$$23) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k^2(1 + \frac{m}{M})x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k^2(1 + \frac{m}{M})y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{k^2(1 + \frac{m}{M})z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Wenn man aber den Bruch $\frac{m}{M}$ als sehr klein vorauszusetzen berechtigt ist, eine Voraussetzung, die wir bei allen unseren folgenden Betrachtungen festhalten werden, so wird man näherungsweise setzen können:

$$24) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k^2 x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k^2 y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{k^2 z}{r^3} = 0; \end{cases}$$

wie von nun an stets geschehen wird.

II.

Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen.

§. 7.

Das Problem, mit dem wir uns jetzt beschäftigen werden, nämlich die Bestimmung der Bahn eines um die Sonne sich bewegenden Weltkörpers aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen desselben, jemals in aller Strenge und Allgemeinheit auflösen zu können, ist bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis so gut wie gar keine Hoffnung vorhanden, was zunächst und hauptsächlich in der transcendenten Natur der hiebei vorzüglich zur Betrachtung und Geltung kommenden Grössen seinen Grund hat; vielmehr wird man bei der Auflösung dieses schweren und wichtigen Problems immer mehr oder weniger auf Näherungsmethoden oder auf Methoden, die auf mehr oder weniger nur näherungsweise richtigen Voraussetzungen beruhen, sonst übrigens eine völlig strenge Durchführung gestatten, hingewiesen sein. Es liegt daher in der Natur der Sache, dass auch die Methode, welche wir im Folgenden entwickeln werden, nur eine Näherungsmethode sein kann; wir werden uns aber bemühen, bei Entwickelung derselben so viel als möglich alle die Ansichten zur Geltung zu bringen, welche die neuere Analysis nun schon seit längerer Zeit als nothwendige Grundlage aller ihrer Entwickelungen bezeichnet hat, wenn dieselben, — natürlich jede in ihrem besonderen Bereiche und so weit es ihre eigenthümliche Natur überhaupt gestattet, — auf das Prädicat völliger analytischer Strenge sollen Anspruch machen können. Wir werden daher immer den Grad der Kleinheit der ganzen vernachlässigten Grössen, nicht bloss einzelner Glieder derselben, angeben, so weit dies überhaupt möglich ist, und die Natur des Gegenstandes es gestattet; vor-

züglich werden wir bei der Multiplication mehrgliedriger Grössen oder Ausdrücke in einander uns nie, wie die ältere Reihen-Analysis bei dergleichen Untersuchungen immer that, die Vernachlässigung irgend welcher Glieder gestatten, und, wie gesagt, überhaupt allen den Erfordernissen, so viel es bei diesem Gegenstande irgend möglich ist, zu genügen suchen, welche die neuere Analysis für ihre Untersuchungen in Anspruch nimmt, wenn dieselben so viel als möglich völliger analytischer Strenge entsprechen sollen. Natürlich werden wir auch zeigen, wie man auf dem Wege successiver Annäherungen die gesuchten Grössen immer genauer und genauer bestimmen kann, indem man entweder dieselben in immer engere und engere Gränzen einschliesst, oder bei ihrer Berechnung sich nach und nach die Vernachlässigung immer kleinerer und kleinerer Grössen gestattet. Hierbei bemerke ich aber ausdrücklich, dass ich bei der folgenden Auflösung unserer Aufgabe noch keineswegs das Ideal erreicht zu haben glaube, welches ich mir selbst von einer solchen Auflösung gebildet habe, dass dieselbe vielmehr, wovon Niemand vollkommener als ich selbst überzeugt sein kann, noch weit hinter diesem Ideal zurückgeblieben ist; ich bemerke aber auch, dass ich der Meinung bin, dass bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis nicht mehr zu leisten ist, als ich im Folgenden zu leisten eifrigst bemühet gewesen bin, was mir, wie ich offen gestehe, nur erst nach einer mehrjährigen Beschäftigung mit dieser so überaus wichtigen und interessanten Aufgabe in der Weise, wie ich im Folgenden zeigen werde, gelungen ist.

§. 8.

Weil die Coordinaten x, y, z unseres Weltkörpers natürlich im Allgemeinen als Functionen der Zeit t, welcher sie entsprechen, zu betrachten sind, so werden wir im Allgemeinen

$$x = F(t), \quad y = \Phi(t), \quad z = \mathfrak{F}(t)$$

zu setzen berechtigt sein, und haben nun, dies vorausgesetzt, uns zunächst mit der weiteren Entwickelung der aus §. 2. bekannten Grössen

$$2f_1^{xy} = \pm (x_2y_3 - x_3y_2),$$

$$2f_2^{xy} = \pm (x_1y_3 - x_3y_1),$$

$$2f_3^{xy} = \pm (x_1y_2 - x_2y_1)$$

zu beschäftigen.

Weil in den früher eingeführten Bezeichnungen

$$t_1 = t_2 - (t_2 - t_1) = t_2 - \tau_3,$$

$$t_3 = t_2 + (t_3 - t_2) = t_2 + \tau_1$$

ist, so können wir x_1, x_3 und y_1, y_3 mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes respective nach Potenzen von τ_3, τ_1 entwickeln. Bezeichnen nämlich ϑ, ϑ' und ϑ_1, ϑ_1' gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wie denselben die neuere Analysis darstellt, wenn wir bei der Entwickelung bis auf Glieder gehen, die in Bezug auf τ_3, τ_1 von der $(n+1)$sten Ordnung sind, dabei aber zugleich die von der neueren Analysis eingeführten Reste der Taylor'schen Reihe berücksichtigen:

$$x_1 = x_2 - \frac{\tau_3}{1!} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_3^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} - \frac{\tau_3^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} + \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^n \cdot \frac{\tau_3^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n x_2}{\partial t_2^n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(t_2 - \vartheta\tau_3),$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\tau_1}{1!} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_1^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{\tau_1^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n x_2}{\partial t_2^n} + \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(t_2 + \vartheta'\tau_1)$$

und

$$y_1 = y_2 - \frac{\tau_3}{1!} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_3^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} - \frac{\tau_3^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} + \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^n \cdot \frac{\tau_3^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n y_2}{\partial t_2^n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 - \vartheta_1\tau_3),$$

$$y_3 = y_2 + \frac{\tau_1}{1!} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_1^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{\tau_1^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n y_2}{\partial t_2^n} + \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1);$$

wo der Kürze wegen im Allgemeinen

$$n! = 1.2.3 \ldots. n$$

gesetzt worden ist.

Was nun die Reste

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(t_2 - \vartheta\tau_3), \quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(t_2 + \vartheta'\tau_1)$$

und

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 - \vartheta_1\tau_3), \quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1)$$

betrifft, so ist die Analysis, bei dem gegenwärtigen Grade ihrer Ausbildung, bekanntlich ganz ausser Stande, dieselben im Allgemeinen zu bestimmen. Nur in gewissen Fällen, wo man die Form der betreffenden Function kennt, lassen sich Gränzen angeben, zwischen denen diese Reste liegen oder welche dieselben nicht übersteigen können. Im vorliegenden Falle liegt aber auch dies ganz ausser den Gränzen der Möglichkeit, weil man die Form der hier zur Betrachtung kommenden Functionen gar nicht kennt, und wir sind daher genöthigt, uns hier mit den folgenden Bemerkungen zu begnügen.

In I. §. 10. ist bewiesen worden, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda x}{\partial t^\lambda}, \quad \frac{\partial^\lambda y}{\partial t^\lambda}, \quad \frac{\partial^\lambda z}{\partial t^\lambda};$$

also, in der oben eingeführten Bezeichnung, die Differentialquotienten

$$F^{(\lambda)}(t), \quad \Phi^{(\lambda)}(t), \quad \Psi^{(\lambda)}(t),$$

für jede Zeit t in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ sind, d. h. in allen ihren Gliedern die Potenz k^λ als Factor enthalten. Daher sind die Reste

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(t_2 - \vartheta\tau_3), \quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(t_2 + \vartheta'\tau_1)$$

und

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 - \vartheta_1\tau_3), \quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1)$$

in Bezug auf die Grösse k von der $(n+1)$sten Ordnung, so dass sie in allen ihren Gliedern die Potenz k^{n+1} als Factor enthalten, wozu ausserdem noch kommt, dass alle Glieder dieser Reste noch durch das Product $(n+1)!$ dividirt sind und also eigentlich alle die Grösse

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k^{n+1}}{1.2.3 \ldots (n+1)}$$

als Factor enthalten. Nach I. §. 9. ist nun z. B. für $n = 3, 4, 5$:

$$k^4 = 0{,}00000008756$$

$$k^5 = 0{,}00000000151$$

$$k^6 = 0{,}00000000003$$

also:

$$\frac{k^4}{4!} = 0{,}00000000365$$

$$\frac{k^5}{5!} = 0{,}00000000001$$

und

$$\frac{k^6}{6!} = 0{,}00000000000004$$

woraus man sieht, wie ungemein klein diese Grössen sehr bald werden. Umfassen daher die Zeitintervalle τ_3 und τ_1 zwischen der ersten und zweiten und zweiten und dritten Beobachtung nur eine geringe Anzahl von Tagen, so wird man im Allgemeinen zu dem Schlusse berechtigt sein, dass die absoluten Werthe der obigen Reste, wenn man etwa n nicht kleiner als 3 annimmt, sehr klein sind, und wird dieselben also ohne merklichen Fehler vernachlässigen oder als verschwindend betrachten können. Dass hierbei übrigens der völligen mathematischen Strenge und Evidenz noch Manches zu wünschen übrig bleibt, kann und darf freilich nicht geleugnet werden; aber eben weil es sich hier nur um eine Näherungsmethode handelt, wird man sich mit den obigen Schlüssen begnügen dürfen und auch müssen, indem in der That in diesem Falle der gegenwärtige Zustand der Analysis noch einen Schritt weiter zu gehen nicht gestattet. Mit besonderer Deutlichkeit geht, wie es mir scheint, aus der obigen Darstellung hervor, warum es ein der Methode günstiger Umstand ist, wenn die Zeitintervalle τ_3 und τ_1 nur eine geringe Anzahl von Tagen umfassen, wovon nach meiner Meinung der Grund nicht bei allen früheren Entwickelungen dieses wichtigen Gegenstandes mit gleicher Deutlichkeit hervortritt, da diese Entwickelungen der Grösse k, auf die nach meiner Ansicht hier Alles ankommt, nicht gleich vom Anfange an die gebührende Aufmerksamkeit schenken.

Was nun unsere ferneren Entwickelungen betrifft, so werden dieselben sich von den früheren Darstellungen dieses wichtigen Gegenstandes in mehreren Punkten, namentlich aber auch darin wesentlich unterscheiden, dass wir, ausser der vorher namhaft gemachten unvermeidlichen Vernachlässigung der Reste der Taylor'schen Reihe, uns von nun an irgend welche andere Vernach-

lässigungen, streng genommen, gar nicht weiter gestatten, insbesondere also bei der Multiplication der für x_1, x_3 und y_1, y_3 gesetzten mehrgliedrigen Ausdrücke in einander gar keine Glieder unberücksichtigt lassen werden, Vernachlässigungen mancherlei Art, welche bekanntlich die ältere Reihen-Analysis sich ohne Weiteres gestatten zu dürfen glaubte.

Es würde gar keine Schwierigkeit haben, die folgenden Entwickelungen ganz allgemein für jedes n durchzuführen. Um aber unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir uns damit begnügen, die Entwickelung nur für $n = 5$ vollständig durchzuführen, was in der That für den vorliegenden Gegenstand auch vollständig genügt. Wir werden also die Reste

$$\frac{\tau_3{}^6 F^{VI}(t_2 - \vartheta\tau_3)}{1.2.3.4.5.6}, \quad \frac{\tau_1{}^6 F^{VI}(t_2 + \vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4.5.6}$$

und

$$\frac{\tau_3{}^6 \Phi^{VI}(t_2 - \vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4.5.6}, \quad \frac{\tau_1{}^6 \Phi^{VI}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4.5.6}$$

als verschwindend betrachten, und daher im Folgenden näherungsweise

$$x_1 = x_2 - \frac{\tau_3}{1!}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_3{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2{}^2} - \frac{\tau_3{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2{}^3} + \frac{\tau_3{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 x_2}{\partial t_2{}^4} - \frac{\tau_3{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 x_2}{\partial t_2{}^5},$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\tau_1}{1!}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_1{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2{}^2} + \frac{\tau_1{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2{}^3} + \frac{\tau_1{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 x_2}{\partial t_2{}^4} + \frac{\tau_1{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 x_2}{\partial t_2{}^5}$$

und

$$y_1 = y_2 - \frac{\tau_3}{1!}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_3{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2{}^2} - \frac{\tau_3{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2{}^3} + \frac{\tau_3{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 y_2}{\partial t_2{}^4} - \frac{\tau_3{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 y}{\partial t_2{}^5},$$

$$y_3 = y_2 + \frac{\tau_1}{1!}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_1{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2{}^2} + \frac{\tau_1{}^2}{3!}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2{}^3} + \frac{\tau_1{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 y_2}{\partial t_2{}^4} + \frac{\tau_1{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 y_2}{\partial t_2{}^5}$$

setzen.

§. 9.

Wenn wir der Kürze wegen im Allgemeinen

$$25) \quad \ldots \quad \Pi_{\lambda,\mu} = \frac{\partial^\lambda x_2}{\partial t_2{}^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu y_2}{\partial t_2{}^\mu} - \frac{\partial^\lambda y_2}{\partial t_2{}^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu x_2}{\partial t_2{}^\mu}$$

setzen, wobei die Grössen x_2 und y_2 selbst als ihre 0ten Differentialquotienten betrachtet werden, so erhalten wir aus dem vorhergehenden Paragraphen unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$26) \quad \ldots \quad x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$= \frac{\tau_1}{1!} \cdot \Pi_{0,1} + \frac{\tau_1{}^2}{2!} \cdot \Pi_{0,2} + \frac{\tau_1{}^3}{3!} \cdot \Pi_{0,3} + \frac{\tau_1{}^4}{4!} \cdot \Pi_{0,4} + \frac{\tau_1{}^5}{5!} \cdot \Pi_{0,5}$$

und

$$27) \quad \ldots \quad x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$= \frac{\tau_3}{1!} \cdot \Pi_{0,1} - \frac{\tau_3{}^2}{2!} \cdot \Pi_{0,2} + \frac{\tau_3{}^3}{3!} \cdot \Pi_{0,3} - \frac{\tau_3{}^4}{4!} \cdot \Pi_{0,4} + \frac{\tau_3{}^5}{5!} \cdot \Pi_{0,5}.$$

Ferner ist ein allgemeines Glied von $x_1 y_3$ offenbar

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3{}^\lambda \tau_1{}^\mu}{\lambda! \mu!} \cdot \frac{\partial^\lambda x_2}{\partial t_2{}^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu y_2}{\partial t_2{}^\mu},$$

und das entsprechende, nämlich gleiche Potenzen von τ_1 und τ_3 enthaltende Glied von $x_3 y_1$ ist

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3{}^\lambda \tau_1{}^\mu}{\lambda! \mu!} \cdot \frac{\partial^\lambda y_2}{\partial t_2{}^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu x_2}{\partial t_2{}^\mu}.$$

Also ist von $x_1 y_3 - x_3 y_1$ ein allgemeines Glied:

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3{}^\lambda \tau_1{}^\mu}{\lambda! \mu!} \left(\frac{\partial^\lambda x_2}{\partial t_2{}^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu y_2}{\partial t_2{}^\mu} - \frac{\partial^\lambda y_2}{\partial t_2{}^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu x_2}{\partial t_2{}^\mu} \right)$$

oder nach 25):

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3{}^\lambda \tau_1{}^\mu}{\lambda! \mu!} \cdot \Pi_{\lambda,\mu}.$$

In diesem allgemeinen Gliede muss man, um die Grösse

$$x_1 y_3 - x_3 y_1$$

zu bilden, für $\lambda\mu$ die folgenden Combinationen setzen:

00	01	02	03	04	05
10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

Weil aber nach 25) für $\lambda = \mu$ offenbar

$$\Pi_{\lambda,\mu} = 0$$

ist, so braucht man in dem obigen Ausdrucke des allgemeinen Gliedes für $\lambda\mu$ nur die folgenden Combinationen zu setzen:

01	02	03	04	05
10	12	13	14	15
20	21	23	24	25
30	31	32	34	35
40	41	42	43	45
50	51	52	53	54

Unter der Voraussetzung aber, dass λ und μ ungleich sind, ist nach 25) offenbar

$$\Pi_{\lambda,\mu} + \Pi_{\mu,\lambda} = 0.$$

Wenn man also je zwei Glieder von der Form

$$(-1)^{\lambda} \cdot \frac{\tau_3{}^{\lambda}\tau_1{}^{\mu}}{\lambda!\mu!} \cdot \Pi_{\lambda,\mu} \text{ und } (-1)^{\mu} \cdot \frac{\tau_3{}^{\mu}\tau_1{}^{\lambda}}{\lambda!\mu!} \cdot \Pi_{\mu,\lambda},$$

wo λ und μ ungleich sein sollen, in ein Glied zusammenzieht, so erhält man für das allgemeine Glied von $x_1y_3 - x_3y_1$ den Ausdruck:

$$\frac{(-1)^{\lambda}\tau_3{}^{\lambda}\tau_1{}^{\mu} - (-1)^{\mu}\tau_3{}^{\mu}\tau_1{}^{\lambda}}{\lambda!\mu!} \Pi_{\lambda,\mu},$$

in welchem offenbar λ kleiner als μ angenommen werden kann, und daher für $\lambda\mu$ nur die folgenden Combinationen gesetzt zu werden brauchen:

01	02	03	04	05
	12	13	14	15
		23	24	25
			34	35
				45

indem man, wie sich nach dem Obigen von selbst versteht, immer $0! = 1$ zu setzen hat.

Auf diese Weise erhält man für $x_1y_3 - x_3y_1$ den folgenden Ausdruck:

28) . . . . . $x_1y_3 - x_3y_1$

$$= \frac{\tau_1+\tau_3}{1!}\Pi_{0,1} + \frac{\tau_1^2-\tau_3^2}{2!}\Pi_{0,2} + \frac{\tau_1^3+\tau_3^3}{3!}\Pi_{0,3} + \frac{\tau_1^4-\tau_3^4}{4!}\Pi_{0,4} + \frac{\tau_1^5+\tau_3^5}{5!}\Pi_{0,5}$$

$$- \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}\Pi_{1,2} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}\Pi_{1,3} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}\Pi_{1,4}$$

$$- \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}\Pi_{1,5}$$

$$+ \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}\Pi_{2,3} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}\Pi_{2,4} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}\Pi_{2,5}$$

$$- \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}\Pi_{3,4} - \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}\Pi_{3,5}$$

$$+ \frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}\Pi_{4,5}.$$

Wegen 26) und 27) kann man diesen Ausdruck auch auf die folgende Form bringen:

29) . . . . . $x_1y_3 - x_3y_1$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2)$$

$$- \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}\Pi_{1,2} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}\Pi_{1,3} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}\Pi_{1,4}$$

$$- \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}\Pi_{1,5}$$

$$+ \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}\Pi_{2,3} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}\Pi_{2,4} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}\Pi_{2,5}$$

$$- \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}\Pi_{3,4} - \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}\Pi_{3,5}$$

$$+ \frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}\Pi_{4,5}.$$

Nach I. §. 10. ist $\Pi_{\lambda,\mu}$ in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung $\lambda+\mu$; will man also die Grösse $x_1y_3 - x_3y_1$ so ordnen,

dass die Glieder nach den Potenzen der Grösse k fortschreiten, so muss man dieselbe auf folgende Art schreiben:

$$30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x_1 y_3 - x_3 y_1$$

$$= \frac{\tau_1 + \tau_3}{1!} \Pi_{0,1}$$

$$+ \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{2!} \Pi_{0,2}$$

$$+ \frac{\tau_1^3 + \tau_3^3}{3!} \Pi_{0,3} - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3)}{1!2!} \Pi_{1,2}$$

$$+ \frac{\tau_1^4 - \tau_3^4}{4!} \Pi_{0,4} - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2)}{1!3!} \Pi_{1,3}$$

$$+ \frac{\tau_1^5 + \tau_3^5}{5!} \Pi_{0,5} - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3)}{1!4!} \Pi_{1,4} + \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 (\tau_1 + \tau_3)}{2!3!} \Pi_{2,3}$$

$$- \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1^4 - \tau_3^4)}{1!5!} \Pi_{1,5} + \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 (\tau_1^2 - \tau_3^2)}{2!4!} \Pi_{2,4}$$

$$+ \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 (\tau_1^3 + \tau_3^3)}{2!5!} \Pi_{2,5} - \frac{\tau_1^3 \tau_3^3 (\tau_1 + \tau_3)}{3!4!} \Pi_{3,4}$$

$$- \frac{\tau_1^3 \tau_3^3 (\tau_1^2 - \tau_3^2)}{3!5!} \Pi_{3,5}$$

$$+ \frac{\tau_1^4 \tau_3^4 (\tau_1 + \tau_3)}{4!5!} \Pi_{4,5}.$$

§. 10.

Es ist nun nöthig, die im Vorhergehenden im Allgemeinen durch Π bezeichneten Grössen weiter zu entwickeln, was zuerst die Entwickelung der Differentialquotienten der Coordinaten x_2, y_2 erfordert.

Bekanntlich ist aber nach 24):

$$31) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} = -k^2 \frac{x^2}{r_2^3}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} = -k^2 \frac{y_2}{r_2^3};$$

woraus man durch fernere Differentiation ohne Schwierigkeit erhält:

$$32) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} = -\frac{k^2}{r_2^3} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} x_2, \\ \frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} = -\frac{k^2}{r_2^3} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} y_2; \end{cases}$$

ferner:

33)

$$\frac{\partial^4 x_2}{\partial t_2^4} = -\frac{k^2}{r_2^3}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \frac{6k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{3k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}x_2 - \frac{12k^2}{r_2^5}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 x_2,$$

$$\frac{\partial^4 y_2}{\partial t_2^4} = -\frac{k^2}{r_2^3}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} + \frac{6k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{3k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}y_2 - \frac{12k^2}{r_2^5}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 y_2;$$

und hieraus:

34)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^5 x_2}{\partial t_2^5} = -\dfrac{k^2}{r_2^3}\cdot\dfrac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} + \dfrac{9k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \dfrac{9k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \qquad + \dfrac{3k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}x_2 - \dfrac{36k^2}{r_2^5}\cdot\left(\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} - \dfrac{36k^2}{r_2^5}\cdot\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\dfrac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}x_2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{60k^2}{r_2^6}\cdot\left(\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 x_2, \\ \dfrac{\partial^5 y_2}{\partial t_2^5} = -\dfrac{k^2}{r_2^3}\cdot\dfrac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} + \dfrac{9k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} + \dfrac{9k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\cdot\dfrac{\partial y_2}{\partial t_2} \\ \qquad + \dfrac{3k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}y_2 - \dfrac{36k^2}{r_2^5}\cdot\left(\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2\cdot\dfrac{\partial y_2}{\partial t_2} - \dfrac{36k^2}{r_2^5}\cdot\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\dfrac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}y_2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{60k^2}{r_2^6}\cdot\left(\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 y_2. \end{cases}$$

Weiter zu gehen, liegt bekanntlich zunächst nicht in unserer Absicht. Entwickeln wir nun aber mittelst der vorhergehenden Ausdrücke der Differentialquotienten der Coordinaten x_2, y_2 die im Allgemeinen durch Π bezeichneten Grössen, so finden wir, dass dieselben sämmtlich die Grösse

$$\Pi_{0,1} = x_2\frac{\partial y_2}{\partial t_2} - y_2\frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

als Factor enthalten; und wenn wir daher der Kürze wegen im Allgemeinen

35) . . . . . $G_{\lambda,\mu} = \dfrac{\Pi_{\lambda,\mu}}{\Pi_{0,1}}$

setzen, so erhalten wir mittelst einer nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegenden Rechnung die folgenden Ausdrücke:

36)

$$G_{0,1} = 1,$$

$$G_{0,2} = 0,$$

$$G_{0,3} = -\frac{k^2}{r_2^3},$$

$$G_{0,4} = \frac{6k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

$$G_{0,5} = \frac{k^4}{r_2^6} - \frac{36k^2}{r_2^5} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{9k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2},$$

$$G_{1,2} = \frac{k^2}{r_2^3},$$

$$G_{1,3} = -\frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

$$G_{1,4} = -\left\{\frac{k^4}{r_2^6} - \frac{12k^2}{r_2^5} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right\},$$

$$G_{1,5} = \frac{12k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} - \frac{60k^2}{r_2^6}\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 + \frac{36k^2}{r_2^5} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} - \frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3},$$

$$G_{2,3} = \frac{k^4}{r_2^6},$$

$$G_{2,4} = -\frac{6k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

$$G_{2,5} = -\left\{\frac{k^6}{r_2^9} - \frac{36k^4}{r_2^8} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{9k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right\},$$

$$G_{3,4} = \frac{k^6}{r_2^9} + \frac{6k^4}{r_2^8} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{3k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2},$$

$$G_{3,5} = -\left\{\frac{9k^6}{r_2^{10}} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} + \frac{48k^4}{r_2^9} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 + \frac{9k^4}{r_2^8} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} - \frac{3k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}\right\},$$

$$G_{4,5} = \frac{k^8}{r_2^{12}} + \frac{24k^6}{r_2^{11}} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{12k^6}{r_2^{10}} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} + \frac{72k^4}{r_2^{10}} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^4 + \frac{27k^4}{r_2^8} \cdot \left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right)^2 - \frac{18k^4}{r_2^8} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}.$$

Dass überhaupt $G_{\lambda,\mu}$ in Beziehung auf die Grösse k von der Ordnung $\lambda+\mu-1$ ist, erhellet aus dem, was früher bewiesen worden ist, unmittelbar.

Da es nun, wie aus allem Obigen ganz von selbst hervorgeht, bei dieser ganzen Untersuchung durchaus nicht auf die wirklichen Werthe der Grössen f_1, f_2, f_3, sondern bloss auf deren Verhältniss unter einander ankommt; da ferner bekanntlich

$$f_1 : f_2 : f_3 = \overset{xy}{f_1} : \overset{xy}{f_2} : \overset{xy}{f_3}$$

und

$$2\overset{xy}{f_1} = \pm (x_2 y_3 - x_3 y_2),$$

$$2\overset{xy}{f_2} = \pm (x_1 y_3 - x_3 y_1),$$

$$2\overset{xy}{f_3} = \pm (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

ist, so kann man im Obigen offenbar

$$f_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{\Pi_{0,1}},$$

$$f_2 = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{\Pi_{0,1}},$$

$$f_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\Pi_{0,1}}$$

setzen, und erhält dadurch nach 26), 30), 27), mit Rücksicht auf die Gleichung 35), für die Grössen f_1, f_2, f_3 die folgenden Ausdrücke:

37) $$f_1 = \frac{\tau_1}{1!} \cdot G_{0,1} + \frac{\tau_1^2}{2!} \cdot G_{0,2} + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot G_{0,3} + \frac{\tau_1^4}{4!} \cdot G_{0,4} + \frac{\tau_1^5}{5!} \cdot G_{0,5},$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & \frac{\tau_1 + \tau_3}{1!} \cdot G_{0,1} \\ & + \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{2!} \cdot G_{0,2} \\ & + \frac{\tau_1^3 + \tau_3^3}{3!} \cdot G_{0,3} - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3)}{1!2!} \cdot G_{1,2} \\ & + \frac{\tau_1^4 - \tau_3^4}{4!} \cdot G_{0,4} - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2)}{1!3!} \cdot G_{1,3} \\ & + \frac{\tau_1^5 + \tau_3^5}{5!} \cdot G_{0,5} - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3)}{1!4!} \cdot G_{1,4} + \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 (\tau_1 + \tau_3)}{2!3!} G_{2,3} \\ & - \frac{\tau_1 \tau_3 (\tau_1^4 - \tau_3^4)}{1!5!} \cdot G_{1,5} + \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 (\tau_1^2 - \tau_3^2)}{2!4!} G_{2,4} \\ & + \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 (\tau_1^3 + \tau_3^3)}{2!5!} \cdot G_{2,5} - \frac{\tau_1^3 \tau_3^3 (\tau_1 + \tau_3)}{3!4!} \cdot G_{3,4} \\ & - \frac{\tau_1^3 \tau_3^3 (\tau_1^2 - \tau_3^2)}{3!5!} G_{3,5} \\ & + \frac{\tau_1^4 \tau_3^4 (\tau_1 + \tau_3)}{4!5!} G_{4,5}, \end{aligned}$$

$$f_3 = \frac{\tau_3}{1!} \cdot G_{0,1} - \frac{\tau_3^2}{2!} \cdot G_{0,2} + \frac{\tau_3^3}{3!} \cdot G_{0,3} - \frac{\tau_3^4}{4!} \cdot G_{0,4} + \frac{\tau_3^5}{5!} \cdot G_{0,5};$$

wobei man zu beachten hat, dass

$$G_{0,1}=1, \quad G_{0,2}=0 \quad \text{und} \quad \tau_1+\tau_3=\tau_2$$

ist.

Nach 26), 27), 29) ist auch:

38)

$$f_1=\frac{\tau_1}{1!}\cdot G_{0,1}+\frac{\tau_1^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_1^3}{3!}\cdot G_{0,3}+\frac{\tau_1^4}{4!}\cdot G_{0,4}+\frac{\tau_1^5}{5!}\cdot G_{0,5},$$

$$f_3=\frac{\tau_3}{1!}\cdot G_{0,1}-\frac{\tau_3^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_3^3}{3!}\cdot G_{0,3}-\frac{\tau_3^4}{4!}\cdot G_{0,4}+\frac{\tau_3^5}{5!}\cdot G_{0,5},$$

$$f_2=f_1+f_3-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}G_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}G_{1,3}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3-\tau_3^3)}{1!4!}G_{1,4}$$

$$-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}G_{1,5}$$

$$+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}G_{2,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}G_{2,4}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}G_{2,5}$$

$$-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}G_{3,4}-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}G_{3,5}$$

$$+\frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}G_{4,5}.$$

Wenn man die Reste

$$\frac{\tau_3^4F^{IV}(t_2-\vartheta\tau_3)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\tau_1^4F^{IV}(t_2+\vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

und

$$\frac{\tau_3^4\Phi^{IV}(t_2-\vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\tau_1^4\Phi^{IV}(t_2+\vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

bei einer ersten Näherung vernachlässigt, so muss man, wie aus dem Obigen sich leicht ergiebt:

39)

$$f_1=\frac{\tau_1}{1!}\cdot G_{0,1}+\frac{\tau_1^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_1^3}{3!}\cdot G_{0,3},$$

$$f_3=\frac{\tau_3}{1!}\cdot G_{0,1}-\frac{\tau_3^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_3^3}{3!}\cdot G_{0,3},$$

$$f_2=f_1+f_3-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}\cdot G_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}\cdot G_{1,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}\cdot G_{2,3};$$

also, wie man mittelst 36) leicht findet:

$$40)\quad \begin{cases} f_1 = \tau_1\left(1-\frac{k^2\tau_1{}^2}{6r_2{}^3}\right), \\ f_3 = \tau_3\left(1-\frac{k^2\tau_3{}^2}{6r_2{}^3}\right), \\ f_2 = f_1+f_3-\frac{k^2\tau_1\tau_2\tau_3}{2r_2{}^3}\left(1-\frac{\tau_1-\tau_3}{r_2}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}-\frac{k^2\tau_1\tau_3}{6r_2{}^3}\right); \end{cases}$$

oder, weil

$$f_1+f_3=\tau_1+\tau_3-\frac{k^2(\tau_1{}^3+\tau_3{}^3)}{6r_2{}^3}=\tau_2\left\{1-\frac{k^2(\tau_1{}^2-\tau_1\tau_3+\tau_3{}^2)}{6r_2{}^3}\right\}$$

und folglich

$$f_1+f_3-\frac{k^2\tau_1\tau_2\tau_3}{2r_2{}^3}=\tau_2\left\{1-\frac{k^2(\tau_1{}^2+2\tau_1\tau_3+\tau_3{}^2)}{6r_2{}^3}\right\}=\tau_2\left(1-\frac{k^2\tau_2{}^2}{6r_2{}^3}\right)$$

ist,

$$41)\quad \begin{cases} f_1 = \tau_1\left(1-\frac{k^2\tau_1{}^2}{6r_2{}^3}\right), \\ f_2 = \tau_2\left\{1-\frac{k^2\tau_2{}^2}{6r_2{}^3}+\frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{2r_2{}^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}+\frac{k^4\tau_1{}^2\tau_3{}^2}{12r_2{}^6}\right\}, \\ f_3 = \tau_3\left(1-\frac{k^2\tau_3{}^2}{6r_2{}^3}\right) \end{cases}$$

setzen.

Wenn man die Reste

$$\frac{\tau_3{}^5F^V(t_2-\vartheta\tau_3)}{1.2.3.4.5},\quad \frac{\tau_1{}^5F^V(t_2+\vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4.5}$$

und

$$\frac{\tau_3{}^5\Phi^V(t_2-\vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4.5},\quad \frac{\tau_1{}^5\Phi^V(t_2+\vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4.5}$$

vernachlässigt, so muss man

42)

$$f_1 = \frac{\tau_1}{1!} \cdot G_{0,1} + \frac{\tau_1^2}{2!} \cdot G_{0,2} + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot G_{0,3} + \frac{\tau_1^4}{4!} \cdot G_{0,4},$$

$$f_3 = \frac{\tau_3}{1!} \cdot G_{0,1} - \frac{\tau_3^2}{2!} \cdot G_{0,2} + \frac{\tau_3^3}{3!} \cdot G_{0,3} - \frac{\tau_3^4}{4!} \cdot G_{0,4},$$

$$f_2 = f_1 + f_3 - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!} G_{1,2} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!} G_{1,3} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!} G_{1,4}$$
$$+ \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!} G_{2,3} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!} G_{2,4}$$
$$- \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!} G_{3,4},$$

und folglich nach 36), wie man mittelst leichter Rechnung findet:

43)

$$f_1 = \tau_1 \left(1 - \frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3} + \frac{k^2\tau_1^3}{4r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right),$$

$$f_2 = \tau_2 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{k^4\tau_1\tau_3(\tau_2^2-\tau_1\tau_3)}{24r_2^6} - \frac{k^6\tau_1^3\tau_3^3}{144r_2^9} \\ + \frac{k^2(\tau_1-\tau_3)}{4r_2^4}\left(\tau_2^2 - \frac{k^2\tau_1^2\tau_3^2}{2r_2^3}\right)\frac{\partial r_2}{\partial t_2} \\ + \frac{k^2\tau_1\tau_3}{8r_2^4}\left(\tau_2^2 - 3\tau_1\tau_3 - \frac{k^2\tau_1^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} \\ - \frac{k^2\tau_1\tau_3}{2r_2^5}\left(\tau_2^2 - 3\tau_1\tau_3 + \frac{k^2\tau_1^2\tau_3^2}{12r_2^3}\right)\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 \end{array} \right\},$$

$$f_3 = \tau_3 \left(1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3} - \frac{k^2\tau_3^3}{4r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)$$

setzen, wo man bei der Entwickelung von f_2 nach den Formeln 42) zu beachten hat, dass

$$f_1 + f_3 = \tau_2 \left\{1 - \frac{k^2(\tau_1^2 - \tau_1\tau_3 + \tau_3^2)}{6r_2^3} + \frac{k^2(\tau_1-\tau_3)(\tau_1^2+\tau_3^2)}{4r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right\}$$

oder

$$f_1 + f_3 = \tau_2 \left\{1 - \frac{k^2(\tau_2^2 - 3\tau_1\tau_3)}{6r_2^3} + \frac{k^2(\tau_1-\tau_3)(\tau_1^2+\tau_3^2)}{4r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right\}$$

ist.

Wie man sich nun der im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen bei der Bestimmung der Bahn eines Weltkörpers aus

drei geocentrischen Beobachtungen desselben zu bedienen hat, soll in den folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§. 11.

Nach 13) und 15) hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$44)\quad \left\{\begin{array}{l} \varrho_2 = \frac{1}{\overline{\omega}}\{B_1 R_1 \frac{f_1}{f_2} + B_3 R_3 \frac{f_3}{f_2} - B_2 R_2\}, \\ r_2^2 = R_2^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2 \sec\beta_2^2. \end{array}\right.$$

Wenn man nun Behufs einer ersten Näherung die Reste

$$\frac{\tau_3^4 F^{IV}(t_2 - \vartheta\tau_3)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\tau_1^4 F^{IV}(t_2 + \vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

und

$$\frac{\tau_3^4 \Phi^{IV}(t_2 - \vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\tau_1^4 \Phi^{IV}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

vernachlässigt, welche in Bezug auf die Grösse k bekanntlich von der vierten Ordnung sind, wo

$$k^4 = 0{,}00000008756$$

oder vielmehr

$$\tfrac{1}{24} k^4 = 0{,}00000000365$$

ist, so ist nach 41):

$$45)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 = \tau_1 (1 - \frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}), \\ f_2 = \tau_2\{1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1 - \tau_3)}{2r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} + \frac{k^4\tau_1^2\tau_3^2}{12r_2^6}\}, \\ f_3 = \tau_3 (1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}). \end{array}\right.$$

In diesen Formeln muss man nun aber bei der ersten Näherung nothwendig auch das den Differentialquotienten $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ enthaltende Glied

$$\frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1 - \tau_3)}{2r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

welches, weil der in Rede stehende Differentialquotient in Bezug auf die Grösse k bekanntlich von der ersten Ordnung ist, in Be-

zug auf dieselbe Grösse der dritten Ordnung angehört *), vernachlässigen. Die Vernachlässigung dieses Gliedes ist aber mit desto grösserem Rechte gestattet, je näher $\tau_1 - \tau_3$ der Null kommt **), d. h. je genauer die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten und zweiten und dritten Beobachtung einander gleich sind, woraus sich die sehr wichtige Regel ergiebt, dass man bei Rechnungen dieser Art jederzeit vorzugsweise drei solche der Rechnung zur Grundlage dienende Beobachtungen des betreffenden Weltkörpers auszuwählen hat, bei denen die erste und zweite und zweite und dritte Beobachtung durch möglichst nahe gleiche Zwischenzeiten von einander getrennt sind. Dies vorausgesetzt, werden wir also bei der ersten Näherung nach dem Obigen

$$46) \quad \ldots \quad \begin{cases} f_1 = \tau_1 \left(1 - \frac{k^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}\right), \\ f_2 = \tau_2 \left(1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3} + \frac{k^4 \tau_1^2 \tau_3^2}{12 r_2^6}\right), \\ f_3 = \tau_3 \left(1 - \frac{k^2 \tau_3^2}{6 r_2^3}\right) \end{cases}$$

zu setzen haben, und haben daher in Verbindung mit den Gleichungen 44) zwischen den Grössen ϱ_2 und r_2 jetzt zwei Gleichungen, die zur Bestimmung dieser beiden Grössen, nämlich der curtirten Entfernung des Weltkörpers von der Erde und seines Vectors zur Zeit der zweiten Beobachtung, vollständig hinreichen; und wie diese Gleichungen aufzulösen sind, was in zweckmässiger Weise nur durch Näherung geschehen kann, ist daher jetzt zunächst zu zeigen.

Bei der ersten Näherung wird man sich, da

$$\tfrac{1}{12} k^4 = 0{,}00000000730$$

ist, unbedenklich noch die Vernachlässigung des Gliedes $\frac{k^4 \tau_1^2 \tau_3^2}{12 r_2^6}$ gestatten dürfen, und daher nach 46)

---

*) $\frac{1}{2} k^3 = 0{,}00002545$.

**) Dass die Zwischenzeiten τ_1, τ_3 nie zu gross sein dürfen, ist im Vorhergehenden schon hervorgehoben worden, und als eine allgemeine, bei Rechnungen der vorliegenden Art stets zu beobachtende Regel zu betrachten, auf die wir daher auch von jetzt an nie wieder von Neuem hinweisen werden.

$$47) \quad \ldots \quad \begin{cases} f_1 = \tau_1 \left(1 - \frac{k^2 \tau_1^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right), \\ f_2 = \tau_2 \left(1 - \frac{k^2 \tau_2^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right), \\ f_3 = \tau_3 \left(1 - \frac{k^2 \tau_3^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right) \end{cases}$$

zu setzen haben.

Bezeichnen wir die Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung durch $\mathfrak{K}_2$, so ist

$$48) \quad \ldots \quad \varrho_2 = \mathfrak{K}_2 \cos \beta_2, \quad \mathfrak{K}_2 = \varrho_2 \sec \beta_2;$$

und berechnen wir nun den Hülfswinkel Δ_2 mittelst der Formel

$$49) \quad \ldots \quad \cos \Delta_2 = - \cos \beta_2 \cos (L_2 - \lambda_2),$$

so erhält die zweite der Gleichungen 44), wie man sogleich übersieht, die folgende Form:

$$50) \quad \ldots \quad r_2 = (R_2^2 - 2 R_2 \mathfrak{K}_2 \cos \Delta_2 + \mathfrak{K}_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir aber

$$51) \quad \ldots \quad \frac{\mathfrak{K}_2}{R_2} = \cos \Delta_2 + v \sin \Delta_2,$$

so erhalten wir mittelst einiger bekannten goniometrischen Transformationen sehr leicht:

$$R_2^2 - 2 R_2 \mathfrak{K}_2 \cos \Delta_2 + \mathfrak{K}_2^2 = R_2^2 \sin \Delta_2^2 (1 + v^2);$$

und nehmen wir nun, damit $\sin \Delta_2$ jederzeit positiv werde, den Hülfswinkel Δ_2 stets zwischen 0 und 180°, was vermöge der Gleichung 49) offenbar unter allen Bedingungen möglich ist, so können wir wegen der Gleichung 50) offenbar

$$52) \quad \ldots \quad r_2 = R_2 \sin \Delta_2 (1 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

setzen.

Wegen der ersten der Gleichungen 44) und der Gleichungen 47) ist nun:

$$\bar{\omega} \varrho_2 = B_1 R_1 \frac{\tau_1 \left(1 - \frac{k^2 \tau_1^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right)}{\tau_2 \left(1 - \frac{k^2 \tau_2^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right)} + B_3 R_3 \frac{\tau_3 \left(1 - \frac{k^2 \tau_3^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right)}{\tau_2 \left(1 - \frac{k^2 \tau_2^{\,2}}{6 r_2^{\,3}}\right)} - B_2 R_2,$$

also:

$$\tau_1 B_1 R_1 \left(1-\frac{k^2\tau_1{}^2}{6r_2{}^3}\right)+\tau_3 B_3 R_3\left(1-\frac{k^2\tau_3{}^2}{6r_2{}^3}\right)-\tau_2(\bar{\omega}\varrho_2+B_2R_2)\left(1-\frac{k^2\tau_2{}^2}{6r_2{}^3}\right)=0,$$

woraus sich sogleich

$$\frac{1}{r_2{}^3}=\frac{6}{k^2}\cdot\frac{\tau_1 B_1 R_1+\tau_3 B_3 R_3-\tau_2(\bar{\omega}\varrho_2+B_2R_2)}{\tau_1{}^3 B_1 R_1+\tau_3{}^3 B_3 R_3-\tau_2{}^3(\bar{\omega}\varrho_2+B_2R_2)}$$

oder nach 48) und 52)

$$\frac{1}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{6R_2{}^3\sin\Delta_2{}^3}{k^2}\cdot\frac{\tau_1 B_1 R_1+\tau_3 B_3 R_3-\tau_2(B_2R_2+\bar{\omega}\mathfrak{R}_2\cos\beta_2)}{\tau_1{}^3 B_1 R_1+\tau_3{}^3 B_3 R_3-\tau_2{}^3(B_2R_2+\bar{\omega}\mathfrak{R}_2\cos\beta_2)}$$

ergiebt. Führen wir aber in diese Gleichung für $\mathfrak{R}_2$ den aus 51) sich ergebenden Werth

$$\mathfrak{R}_2=R_2(\cos\Delta_2+v\sin\Delta_2)$$

ein, und setzen der Kürze wegen:

53)
$$\begin{cases} G &= \tau_1 B_1 R_1-\tau_2 B_2 R_2+\tau_3 B_3 R_3-\bar{\omega}\tau_2 R_2\cos\beta_2\cos\Delta_2, \\ G_1 &= \bar{\omega}\tau_2 R_2\cos\beta_2\sin\Delta_2; \\ G' &= \tau_1{}^3 B_1 R_1-\tau_2{}^3 B_2 R_2+\tau_3{}^3 B_3 R_3-\bar{\omega}\tau_2{}^3 R_2\cos\beta_2\cos\Delta_2, \\ G_1' &= \bar{\omega}\tau_2{}^3 R_2\cos\beta_2\sin\Delta_2; \\ F &= \frac{6R_2{}^3\sin\Delta_2{}^3}{k^2}; \end{cases}$$

so wird die in Rede stehende Gleichung:

$$\frac{1}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}=F\frac{G-G_1 v}{G'-G_1' v},$$

aus welcher Gleichung nun v bestimmt werden muss.

Zu dem Ende setzen wir

54) . . . . . $u=\frac{1}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}$,

wobei u als positiv angenommen wird, und also

$$0<u\leqq 1$$

ist; dann ist, wie man leicht findet:

55) . . . . . $v=\pm\frac{\sqrt{(1-u)(1+u)}}{u}$,

und die aufzulösende Gleichung wird also:

$$u^3 = F\frac{Gu \mp G_1\sqrt{(1-u)(1+u)}}{G'u \mp G_1'\sqrt{(1-u)(1+u)}},$$

oder, wenn der Kürze wegen

56) . . . . . $G'' = FG,\quad G_1'' = FG_1$

gesetzt wird:

$$u^3 = \frac{G''u \mp G_1''\sqrt{(1-u)(1+u)}}{G'u \mp G_1'\sqrt{(1-u)(1+u)}},$$

woraus sich sogleich die Gleichung

57) $\quad (G''-G'u^3)u \mp (G_1''-G_1'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)} = 0$

oder

58) . . $(G''-G'u^3)u \mp (G_1''-G_1'u^3)\sqrt{1-u^2} = 0$

ergiebt, welche man nun auf gewöhnliche Weise durch successive Näherung auflösen muss, indem man für u nach dem Obigen die wichtige Gränzenbestimmung $0 < u \leqq 1$ hat, wodurch natürlich die Auflösung dieser Gleichung ungemein erleichtert wird.

Die Berechnung der Coefficienten G', G_1' und G'', G_1'' führt man am besten nach den folgenden Formeln aus:

59)

$$\cos \Delta_2 = -\cos\beta_2 \cos(L_2 - \lambda_2),\quad 0 < \Delta_2 < 180^\circ;$$

$$A = \tau_1 B_1 R_1,$$

$$B = \tau_2 B_2 K_2,$$

$$C = \tau_3 B_3 R_3,$$

$$D = \bar{\omega}\tau_2 R_2 \cos\beta_2 \cos\Delta_2;$$

$$A' = \tau_1^2 A,$$

$$B' = \tau_2^2 B,$$

$$C' = \tau_3^2 C,$$

$$D' = \tau_2^2 D;$$

$$G = A - B + C - D,$$

$$G' = A' - B' + C' - D';$$

$$G_1 = D \operatorname{tang} \Delta_2,$$

$$G_1' = D' \operatorname{tang} \Delta_2;$$

$$F = \frac{6 R_2^3 \sin \Delta_2^3}{k^2},$$

$$G'' = FG,$$

$$G_1'' = FG_1.$$

Bei der Auflösung der Doppelgleichung 57) oder 58) hat man immer das Intervall zwischen 0 und 1 in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, die an den Gränzen dieser kleineren Intervalle liegenden Werthe für u zu setzen, und daraus auf bekannte Weise die engeren Gränzen, zwischen denen u liegen muss, zu ermitteln, worauf man durch weitere Theilung der kleineren Intervalle, in denen die, der in Rede stehenden Gleichung genügenden Werthe von u liegen müssen, noch engere Gränzen für u findet: eine Rechnung, die man in derselben Weise jederzeit so lange oder so weit fortführen muss, bis man die reellen Wurzeln der aufzulösenden Gleichung, auf die es natürlich hier nur allein ankommen kann, in der verlangten Anzahl von Decimalstellen genau gefunden hat.

Wenn man auf diese Weise u, und mittelst der Formel 55) dann auch v gefunden hat, so ergeben sich ferner r_2, $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2 leicht mittelst der folgenden, unmittelbar aus dem Vorhergehenden fliessenden Formeln:

$$60) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_2 = \dfrac{R_2 \sin \Delta_2}{u}, \\ \mathfrak{R}_2 = R_2 (\cos \Delta_2 + v \sin \Delta_2), \\ \varrho_2 = \mathfrak{R}_2 \cos \beta_2; \end{array} \right.$$

und f_1, f_2, f_3 findet man mittelst der Formeln 47) oder genauer mittelst der Formeln 46).

Dann erhält man ϱ_1, ϱ_3 und r_1, r_3 mittelst der folgenden, aus 13) und 15) sich ergebenden Formeln:

$$61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 = -\dfrac{1}{\omega} \{ A_1 R_1 - A_2 R_2 \dfrac{f_2}{f_1} + A_3 R_3 \dfrac{f_3}{f_1} \}, \\ \varrho_3 = -\dfrac{1}{\omega} \{ C_3 R_3 - C_2 R_2 \dfrac{f_2}{f_3} + C_1 R_1 \dfrac{f_1}{f_3} \} \end{array} \right.$$

oder

61*) $$\begin{cases} \varrho_1 = -\dfrac{\left\{\begin{matrix} \tau_1 A_1 R_1 - \tau_2 A_2 R_2 + \tau_3 A_3 R_3 \\ -\dfrac{k^2}{6 r_2{}^3}(\tau_1{}^3 A_1 R_1 - \tau_2{}^3 A_2 R_2 + \tau_3{}^3 A_3 R_3) \end{matrix}\right\}}{\bar{\omega}\tau_1 (1 - \dfrac{k^2 \tau_1{}^2}{6 r_2{}^3})}, \\ \varrho_3 = -\dfrac{\left\{\begin{matrix} \tau_1 C_1 R_1 - \tau_2 C_2 R_2 + \tau_3 C_3 R_3 \\ -\dfrac{k^2}{6 r_2{}^3}(\tau_1{}^3 C_1 R_1 - \tau_2{}^3 C_2 R_2 + \tau_3{}^3 C_3 R_3) \end{matrix}\right\}}{\bar{\omega}\tau_3 (1 - \dfrac{k^2 \tau_3{}^2}{6 r_2{}^3})}; \end{cases}$$

und

62) . . $$\begin{cases} r_1 = \sqrt{R_1{}^2 + 2\varrho_1 R_1 \cos(L_1 - \lambda_1) + \varrho_1{}^2 \sec \beta_1{}^2}, \\ r_3 = \sqrt{R_3{}^2 + 2\varrho_3 R_3 \cos(L_3 - \lambda_3) + \varrho_3{}^2 \sec \beta_3{}^2}; \end{cases}$$

wobei wir bemerken, dass man sich bei der Berechnung der Verhältnisse zwischen den Grössen f_1, f_2, f_3 auch der am Ende der folgenden Anmerkung zu diesem Paragraphen angegebenen Formeln bedienen kann, die deshalb nicht unbequem sind, weil sie eigentlich bloss die Berechnung sehr kleiner Correctionen zu schon aus den früheren Rechnungen bekannten oder sehr leicht unmittelbar aus den gegebenen Grössen abzuleitenden Näherungswerthen dieser Verhältnisse erfordern.

Endlich erhält man die Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3$$

mittelst der folgenden, leicht aus 6) und 7) sich ergebenden Formeln:

63)

$$x_1 = R_1 \cos L_1 + \varrho_1 \cos \lambda_1, \quad y_1 = R_1 \sin L_1 + \varrho_1 \sin \lambda_1, \quad z_1 = \varrho_1 \operatorname{tang} \beta_1;$$
$$x_2 = R_2 \cos L_2 + \varrho_2 \cos \lambda_2, \quad y_2 = R_2 \sin L_2 + \varrho_2 \sin \lambda_2, \quad z_2 = \varrho_2 \operatorname{tang} \beta_2;$$
$$x_3 = R_3 \cos L_3 + \varrho_3 \cos \lambda_3, \quad y_3 = R_3 \sin L_3 + \varrho_3 \sin \lambda_3, \quad z_3 = \varrho_3 \operatorname{tang} \beta_3.$$

Anmerkung.

Es verdient bemerkt zu werden, dass man sich bei der Behandlung der vorhergehenden Gleichungen noch auf eine andere Art verhalten kann wie vorher.

Es ist nämlich:

$$f_1 = \tau_1 (1 - \frac{k^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}), \quad f_2 = \tau_2 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3}), \quad f_3 = \tau_3 (1 - \frac{k^2 \tau_3^2}{6 r_2^3});$$

also, wie man mit Rücksicht darauf, dass $\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$ ist, leicht findet:

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} - \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{k^2 \tau_2 (\tau_1 - \tau_3)}{6 r_2^3 (1 - \frac{k^2 \tau_3^2}{6 r_2^3})},$$

$$\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1 = \frac{k^2 \tau_1 \tau_3}{2 r_2^3} + \frac{k^4 \tau_1 \tau_2^2 \tau_3}{12 r_2^6 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3})};$$

und setzen wir folglich

$$P = \frac{f_1}{f_3}, \quad Q = 2 r_2^3 \left(\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1 \right);$$

so sind namentlich dann, wenn die Zwischenzeiten τ_1 und τ_3 zwischen der ersten und zweiten und zweiten und dritten Beobachtung nahe einander gleich sind,

$$\frac{\tau_1}{\tau_3} \text{ und } k^2 \tau_1 \tau_3$$

zwei den Grössen P und Q sehr nahe kommende erste Näherungswerthe dieser Grössen, da namentlich

$$Q = k^2 \tau_1 \tau_3 + \frac{k^4 \tau_1 \tau_2^2 \tau_3}{6 r_2^3 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3})}$$

nur um eine Grösse der vierten Ordnung von $k^2 \tau_1 \tau_3$ verschieden ist.

Aus den beiden Gleichungen

$$P = \frac{f_1}{f_3}, \quad Q = 2 r_2^3 \left(\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1 \right)$$

erhält man sogleich:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P (1 + \frac{Q}{2 r_2^3})}{1 + P}, \quad \frac{f_3}{f_2} = \frac{1 + \frac{Q}{2 r_2^3}}{1 + P};$$

und weil nun bekanntlich

$$\bar{\omega} \varrho_2 = B_1 R_1 \frac{f_1}{f_2} + B_3 R_3 \frac{f_3}{f_2} - B_2 R_2$$

ist, so wird

$$\bar{\omega}\varrho_2 = (B_3R_3 + B_1R_1P)\frac{1+\frac{Q}{2r_2^3}}{1+P} - B_2R_2;$$

folglich:

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{2}{Q}\left\{\frac{(1+P)(\bar{\omega}\varrho_2 + B_2R_2)}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$r_2^2 = R_2^2 + 2\varrho_2R_2\cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2\sec\beta_2^2,$$

oder, wenn man

$$\varrho_2 = \mathfrak{R}_2\cos\beta_2, \quad \cos\Delta_2 = -\cos\beta_2\cos(L_2 - \lambda_2)$$

setzt:

$$r_2^2 = R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\Delta_2 + \mathfrak{R}_2^2;$$

also:

$$\frac{1}{(R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\Delta_2 + \mathfrak{R}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{Q}\left\{\frac{(1+P)(\bar{\omega}\varrho_2 + B_2R_2)}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\},$$

und folglich, wenn man

$$\mathfrak{R}_2 = R_2(\cos\Delta_2 + x\sin\Delta_2)$$

setzt, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2R_2^3\sin\Delta_2^3}{Q}\left\{\frac{(1+P)R_2[\bar{\omega}(\cos\Delta_2 + x\sin\Delta_2)\cos\beta_2 + B_2]}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\}.$$

Setzt man also der Kürze wegen:

$$G = \frac{2R_2^3\sin\Delta_2^3}{Q}\cdot\left\{\frac{(1+P)R_2(B_2 + \bar{\omega}\cos\beta_2\cos\Delta_2)}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\},$$

$$G' = \frac{2R_2^3\sin\Delta_2^3}{Q}\cdot\frac{\bar{\omega}(1+P)R_2\cos\beta_2\sin\Delta_2}{B_3R_3 + B_1R_1P};$$

so ist

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = G + G'x.$$

Wenn man sich mit möglichster Genauigkeit ein für alle Mal eine die Function

$$y = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

darstellende Curve construirt *), die man immer bei Rechnungen dieser Art gebrauchen kann, und dann die durch die Gleichung

$$y = G + G'x$$

charakterisirte Gerade in jedem einzelnen Falle zieht, was nach den Lehren der analytischen Geometrie nicht der mindesten Schwierigkeit unterliegt; so bestimmen die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der vorhergehenden Curve offenbar die der Gleichung

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = G + G'x$$

genügenden reellen Werthe von x. Aus diesen Werthen ergeben sich aber die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2, r_2 unmittelbar mittelst der folgenden, aus dem Obigen bekannten Formeln:

$$\mathfrak{R}_2 = R_2(\cos\Delta_2 + x\sin\Delta_2),$$

$$\varrho_2 = \mathfrak{R}_2\cos\beta_2,$$

$$r_2 = \sqrt{R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\Delta_2 + \mathfrak{R}_2^2}.$$

Wie man sich nun überhaupt dieser Formeln zu bedienen hat, unterliegt keinem Zweifel und bedarf kaum noch einer besondern Erläuterung. Aus den ersten Näherungswerthen

$$P = \frac{\tau_1}{\tau_3}, \quad Q = k^2\tau_1\tau_3$$

findet man erste Näherungswerthe von x, $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2, r_2. Hierauf findet man f_1, f_2, f_3 mittelst der Formeln

---

*) Die Construction dieser Curve hat nicht die mindeste Schwierigkeit, setzt aber eine Tafel der Werthe der Function

$$y = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

voraus, die gleichfalls sehr leicht zu berechnen ist. Denn setzt man

$$x = \operatorname{tang}\omega$$

und nimmt ω zwischen $-90°$ und $+90°$, so ist offenbar:

$$y = \cos\omega^3,$$

mittelst welcher Formeln die Werthe von y ungemein leicht berechnet werden können.

$$f_1 = \tau_1 (1 - \frac{k^2 {\tau_1}^2}{6 {r_2}^3}), \quad f_2 = \tau_2 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3}), \quad f_3 = \tau_3 (1 - \frac{k^2 {\tau_3}^2}{6 {r_2}^3})$$

und dann neue Näherungswerthe von P und Q mittelst der Formeln

$$P = \frac{f_1}{f_3}, \quad Q = 2 {r_2}^3 \left(\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1 \right),$$

oder auch unmittelbar mittelst der folgenden, aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von P und Q:

$$P = \frac{\tau_1}{\tau_3} - \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{k^2 \tau_2 (\tau_1 - \tau_3)}{6 r_2^3 (1 - \frac{k^2 {\tau_3}^2}{6 r_2^3})},$$

$$Q = k^2 \tau_1 \tau_3 + \frac{k^4 \tau_1 \tau_2^2 \tau_3}{6 r_2^3 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3})};$$

welche neuen Näherungswerthe von P und Q dann ferner auf dieselbe Weise wie vorher zu neuen Näherungswerthen von x, $\mathfrak{K}_2$, ϱ_2, r_2 führen. Wie man nun aber dieses Verfahren immer weiter fortsetzen kann, bis man alle Grössen mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit gefunden hat, übersieht Jeder auf den ersten Blick.

Wir bemerken hierbei noch, dass sich aus dem Obigen auch leicht die folgenden Formeln zu Berechnung der Verhältnisse zwischen den Grössen f_1, f_2, f_3 ergeben:

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} - \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{k^2 \tau_2 (\tau_1 - \tau_3)}{6 r_2^3 (1 - \frac{k^2 {\tau_3}^2}{6 r_2^3})},$$

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1} + \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{k^2 \tau_2 (\tau_1 - \tau_3)}{6 r_2^3 (1 - \frac{k^2 {\tau_1}^2}{6 r_2^3})}$$

und:

$$(1 + \frac{f_3}{f_1}) \cdot \frac{f_1}{f_2} = 1 + \frac{k^2 \tau_1 \tau_3}{2 r_2^3} + \frac{k^4 \tau_1 \tau_2^2 \tau_3}{12 r_2^6 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3})},$$

$$(1 + \frac{f_1}{f_3}) \cdot \frac{f_3}{f_2} = 1 + \frac{k^2 \tau_1 \tau_3}{2 r_2^3} + \frac{k^4 \tau_1 \tau_2^2 \tau_3}{12 r_2^6 (1 - \frac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3})}.$$

§. 12.

Weil nach 25)

$$\Pi_{0,1} = x_2 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} - y_2 \frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

ist, so ist, wenn i seine aus dem ersten Kapitel bekannte Bedeutung für jetzt auch hier beibehält, nach I. 4) und I. 11) offenbar

$$K \cos i = - \Pi_{0,1},$$

und nach I. 48):

$$K = k \sqrt{\frac{1 + \frac{m}{M}}{A}},$$

also, wenn man den Bruch $\frac{m}{M}$ als verschwindend betrachtet:

64) . . . . . $K = \frac{k}{\sqrt{A}}$.

Also ist

$$k \cos i = - \Pi_{0,1} \cdot \sqrt{A}.$$

Nach §. 10. ist aber:

$$f_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{\Pi_{0,1}}, \quad \Pi_{0,1} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{f_1};$$

$$f_2 = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{\Pi_{0,1}}, \quad \Pi_{0,1} = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{f_2};$$

$$f_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\Pi_{0,1}}, \quad \Pi_{0,1} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{f_3};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$k \cos i = - \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) \sqrt{A}}{f_1},$$

$$k \cos i = - \frac{(x_1 y_3 - x_3 y_1) \sqrt{A}}{f_2},$$

$$k \cos i = - \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1) \sqrt{A}}{f_3};$$

folglich:

$$65) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \sqrt{A} = -\dfrac{kf_1 \cos i}{x_2 y_3 - x_3 y_2}, \\ \sqrt{A} = -\dfrac{kf_2 \cos i}{x_1 y_3 - x_3 y_1}, \\ \sqrt{A} = -\dfrac{kf_3 \cos i}{x_1 y_2 - x_2 y_1}. \end{cases}$$

Weil die Ebene der Bahn unsers Weltkörpers durch die Sonne als Anfang der Coordinaten und durch die Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ geht, so ist ihre Gleichung nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$(y_2 z_3 - y_3 z_2) x + (z_2 x_3 - z_3 x_2) y + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z = 0,$$
$$(y_1 z_3 - y_3 z_1) x + (z_1 x_3 - z_3 x_1) y + (x_1 y_3 - x_3 y_1) z = 0,$$
$$(y_1 z_2 - y_2 z_1) x + (z_1 x_2 - z_2 x_1) y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z = 0;$$

wo bekanntlich auch die Bedingungsgleichung

$$66) \quad x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2 (y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) = 0$$

Statt finden müsste, wenn die Coordinaten sämmtlich in aller Strenge richtig wären.

Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist nun bekanntlich:

$$\cos i^2 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2}{(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (y_2 z_3 - y_3 z_2)^2 + (z_2 x_3 - z_3 x_2)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1 y_3 - x_3 y_1)^2}{(x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (y_1 z_3 - y_3 z_1)^2 + (z_1 x_3 - z_3 x_1)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2};$$

oder, wie man leicht findet:

$$\cos i^2 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1 y_3 - x_3 y_1)^2}{(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2};$$

also:

$$67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos i^2 = \dfrac{(x_2y_3 - x_3y_2)^2}{r_2^2 r_3^2 - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}, \\ \cos i^2 = \dfrac{(x_1y_3 - x_3y_1)^2}{r_3^2 r_1^2 - (x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1)^2}, \\ \cos i^2 = \dfrac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{r_1^2 r_2^2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}; \end{array} \right.$$

folglich nach 65):

$$68) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{k^2 f_1^2}{r_2^2 r_3^2 - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}, \\ A = \dfrac{k^2 f_2^2}{r_3^2 r_1^2 - (x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1)^2}, \\ A = \dfrac{k^2 f_3^2}{r^2 r_2^2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir den in der Zeit τ_1 von dem Vector unsers Weltkörpers beschriebenen Winkel durch ω_1, wo wir, weil in den Fällen, in denen die obigen Rechnungen überhaupt zur Anwendung kommen, τ_1 immer nur eine geringe Anzahl von Tagen umfassen wird, jederzeit zu der Annahme berechtigt sein werden, dass der Winkel ω_1 kleiner als 180^0 ist; so ist

$$\cos \omega_1 = \frac{r_2^2 + r_3^2 - s_1^2}{2 r_2 r_3},$$

und folglich, weil

$$s_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$

also, wie man sogleich übersieht,

$$s_1^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)$$

ist:

$$69) \quad \cos \omega_1 = \frac{x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3}{r_2 r_3},$$

folglich:

$$\sin \omega_1^2 = \frac{r_2^2 r_3^2 - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}{r_2^2 r_3^2},$$

und daher nach 68), weil $\sin \omega_1$ positiv ist:

$$70) \quad \sin \omega_1 = \frac{k f_1}{r_2 r_3 \sqrt{A}};$$

folglich nach 69) und 70):

$$71) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} \omega_1 = \frac{k f_1}{(x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)\sqrt{A}}.$$

Nach I. 30) ist:

$$\frac{1}{r_2} = A + B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_3} = A + B\cos v_3;$$

also:

$$\frac{1}{r_2} - A = B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_3} - A = B\cos v_3;$$

aber offenbar

$$v_3 = v_2 + \omega_1 \quad \text{oder} \quad v_3 = v_2 + \omega_1 - 360^0;$$

also allgemein

$$\cos v_3 = \cos(v_2 + \omega_1),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{r_2} - A = B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_3} - A = B\cos(v_2 + \omega_1);$$

also:

$$\left(\frac{1}{r_2} - A\right)\cos\omega_1 - \left(\frac{1}{r_3} - A\right) = B\sin\omega_1 \sin v_2,$$

folglich

$$B\sin v_2 = \frac{\left(\frac{1}{r_2} - A\right)\cos\omega_1 - \left(\frac{1}{r_3} - A\right)}{\sin\omega_1},$$

oder, wie man leicht findet:

$$B\sin v_2 = A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 - \frac{r_2 - r_3\cos\omega_1}{r_2 r_3 \sin\omega_1}.$$

Nach I. 59) ist aber

$$\frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{kB}{\sqrt{A}}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} \cdot \sin v_2,$$

also, wenn man den Bruch $\frac{m}{M}$ als verschwindend betrachtet:

$$72) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{kB\sin v_2}{\sqrt{A}},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$73) \quad . \quad . \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = k\{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 \cdot \sqrt{A} - \frac{r_2 - r_3\cos\omega_1}{r_2 r_3 \sin\omega_1 \cdot \sqrt{A}}\}$$

oder auch:

$$74) \quad . \quad . \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = k\{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 \cdot \sqrt{A} - \frac{\frac{1}{r_3}\operatorname{cosec}\omega_1 - \frac{1}{r_2}\cot\omega_1}{\sqrt{A}}\}.$$

Bezeichnen wir den in der Zeit τ_3 von dem Vector unsers Weltkörpers beschriebenen Winkel durch ω_3, wo wir, wie vorher ω_1, auch ω_3 kleiner als 180^0 anzunehmen berechtigt sind, so ist

$$\cos\omega_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - s_3^2}{2r_1 r_2},$$

und folglich, weil

$$s_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

also, wie man sogleich übersieht,

$$s_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

ist:

$$75) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos\omega_3 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2},$$

folglich:

$$\sin\omega_3^2 = \frac{r_1^2r_2^2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}{r_1^2r_2^2},$$

und daher nach 68), weil $\sin\omega_3$ positiv ist:

$$76) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\omega_3 = \frac{kf_3}{r_1r_2\sqrt{A}},$$

folglich nach 75) und 76):

$$77) \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tang}\omega_3 = \frac{kf_3}{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)\sqrt{A}}.$$

Nach I. 30) ist:

$$\frac{1}{r_2} = A + B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_1} = A + B\cos v_1;$$

also:

$$\frac{1}{r_2} - A = B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_1} - A = B\cos v_1;$$

aber offenbar

$$v_1 = v_2 - \omega_3 \quad \text{oder} \quad v_1 = v_2 - \omega_3 + 360^0;$$

also allgemein:

$$\cos v_1 = \cos (v_2 - \omega_3),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{r_2} - A = B \cos v_2, \quad \frac{1}{r_1} - A = B \cos (v_2 - \omega_3);$$

also:

$$\frac{1}{r_1} - A - \left(\frac{1}{r_2} - A\right) \cos \omega_3 = B \sin \omega_3 \sin v_2;$$

folglich:

$$B \sin v_2 = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - A\right) - \left(\frac{1}{r_2} - A\right) \cos \omega_3}{\sin \omega_3},$$

oder, wie man leicht findet:

$$B \sin v_2 = \frac{r_2 - r_1 \cos \omega_3}{r_1 r_2 \sin \omega_3} - A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \omega_3;$$

also nach 72):

$$78) \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = k \left\{ \frac{r_2 - r_1 \cos \omega_3}{r_1 r_2 \sin \omega_3 \cdot \sqrt{A}} - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \omega_3 \cdot \sqrt{A} \right\},$$

oder:

$$79) \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{\frac{1}{r_1} \operatorname{cosec} \omega_3 - \frac{1}{r_2} \cot \omega_3}{\sqrt{A}} - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \omega_3 \cdot \sqrt{A}.$$

Zur Berechnung des zweiten, dritten und vierten Differentialquotienten hat man nach I. 55), 56), 57) die folgenden Formeln:

$$80) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} = k^2 \frac{1 - A r_2}{A r_2^3}, \\ \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3} = -k^2 \frac{3 - 2 A r_2}{A r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}, \\ \frac{\partial^4 r_2}{\partial t_2^4} = k^2 \left\{ \frac{6(2 - A r_2)}{A r_2^5} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 - \frac{3 - 2 A r_2}{A r_2^4} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} \right\}. \end{cases}$$

Für den ersten und zweiten Differentialquotienten von r_2 kann man auch die folgenden Ausdrücke entwickeln.

Nach 70) und 76) ist:

$$\sin\omega_1 \cdot \sqrt{A} = \frac{kf_1}{r_2 r_3}, \quad \sin\omega_3 \cdot \sqrt{A} = \frac{kf_3}{r_1 r_2};$$

also:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 \cdot \sqrt{A} = \frac{kf_1}{2r_2 r_3 \cos\tfrac{1}{2}\omega_1{}^2}, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_3 \cdot \sqrt{A} = \frac{kf_3}{2r_1 r_2 \cos\tfrac{1}{2}\omega_2{}^3}.$$

Nun ist aber nach 69) und 75):

$$2\cos\tfrac{1}{2}\omega_1{}^2 = 1 + \cos\omega_1 = \frac{r_2 r_3 + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{r_2 r_3},$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3{}^2 = 1 + \cos\omega_3 = \frac{r_1 r_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_1 r_2};$$

also:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 \cdot \sqrt{A} = \frac{kf_1}{r_2 r_3 + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_3 \cdot \sqrt{A} = \frac{kf_3}{r_1 r_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}.$$

Ferner ist nach 69) und 75):

$$r_2 - r_3\cos\omega_1 = \frac{r_2 r_2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{r_2},$$

$$r_2 - r_1\cos\omega_3 = \frac{r_2 r_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_2};$$

und nach dem Obigen:

$$r_2 r_3 \sin\omega_1 \cdot \sqrt{A} = kf_1, \quad r_1 r_2 \sin\omega_3 \cdot \sqrt{A} = kf_3;$$

also:

$$\frac{r_2 - r_3\cos\omega_1}{r_2 r_3 \sin\omega_1 \cdot \sqrt{A}} = \frac{r_2 r_2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{kr_2 f_1},$$

$$\frac{r_2 - r_1\cos\omega_3}{r_1 r_2 \sin\omega_3 \cdot \sqrt{A}} = \frac{r_2 r_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{kr_2 f_3}.$$

Folglich ist nach 73) und 78):

$$80^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial t_2} = \dfrac{k^2 f_1}{r_2 r_3 + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)} - \dfrac{r_2 r_2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{r_2 f_1}, \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial t_2} = \dfrac{r_2 r_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_2 f_3} - \dfrac{k^2 f_3}{r_1 r_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}. \end{cases}$$

Ferner erhält man aus der ersten Formel in 80) und aus 68) leicht:

$$80^{**}) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} = \frac{r_2^2 r_3^2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)^2 - k^2 r_2 f_1^2}{r_2^3 f_1^2}, \\ \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 - k^2 r_2 f_3^2}{r_2^3 f_3^2}. \end{cases}$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{kB}{\sqrt{A}} \sin v_2, \quad 1 - Ar_2 = Br_2 \cos v_2$$

ist, so ist:

$$81) \quad . \quad . \quad \sin v_2 = \frac{\sqrt{A}}{kB} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}, \quad \cos v_2 = \frac{1 - Ar_2}{Br_2};$$

folglich:

$$82) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tang} v_2 = \frac{r_2 \sqrt{A}}{k(1 - Ar_2)} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

mittelst welcher Formel sich v_2 ohne alle Zweideutigkeit bestimmen lässt, wenn man nur die folgenden, aus 81) sich unmittelbar ergebenden Regeln beachtet:

Wenn

$\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$	$1 - Ar_2$		
positiv	positiv	ist, so ist	$0 < v_2 < 90^o$
positiv	negativ		$90^o < v_2 < 180^o$
negativ	negativ		$180^o < v_2 < 270^o$
negativ	positiv		$270^o < v_2 < 360^o$.

Hat man aber v_2 auf diese Weise gefunden, so findet man B mittelst einer der beiden folgenden Formeln:

$$83) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B = \frac{\sqrt{A} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}}{k \sin v_2}, \quad B = \frac{1 - Ar_2}{r_2 \cos v_2}.$$

Wenn

$$A > B, \quad A = B, \quad A < B,$$

so ist bekanntlich die Bahn respective eine

Ellipse, Parabel, Hyperbel;

im letzten Falle nämlich der Zweig einer Hyperbel, innerhalb welches M als Brennpunkt liegt.

Die Fälle der Ellipse und Parabel, welche für uns hier zunächst nur von Interesse sind, wollen wir nun noch etwas weiter betrachten, indem wir von jetzt an in beiden Fällen unter t_2 die Zeit verstehen, welche zur Beschreibung der wahren Anomalie v_2 verwandt worden ist, im Falle der Ellipse aber die der wahren Anomalie v_2 entsprechende excentrische Anomalie durch u_2 bezeichnen werden.

Sei nun zuerst $A > B$, die Bahn also eine Ellipse, so ist nach der Theorie der Kegelschnitte, wenn a, b, e, p ihre bekannte gewöhnliche Bedeutung haben:

$$84) \quad \ldots \quad \begin{cases} a = \dfrac{A}{(A-B)(A+B)}, \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{(A-B)(A+B)}}, \\ c = \dfrac{B}{A}, \quad p = \dfrac{2}{A}. \end{cases}$$

Zur Berechnung von u_2 hat man nach I. 84) die Formel:

$$85) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v_2$$

oder

$$86) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u_2 = \sqrt{\frac{A-B}{A+B}} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v_2;$$

und t_2 ergiebt sich nach I. 88) mittelst der Formel

$$87) \quad \ldots \quad t_2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} (u_2 - e \sin u_2)$$

oder

$$88) \quad \ldots \quad t_2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} (u_2 - \frac{B}{A} \sin u_2).$$

Wenn ferner $A = B$, die Bahn also eine Parabel ist, so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten:

$$89) \quad \ldots \quad p = \frac{2}{A} = \frac{2}{B},$$

und t_2 erhält man mittelst der aus I. 94) bekannten Formel:

90) . . . . $t_2 = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4k\sqrt{2}}(\text{tang}\,\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{3}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}v_2{}^3)$

oder

91) . . . . $t_2 = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2k}(\text{tang}\,\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{3}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}v_2{}^3)$.

Auf diese Weise kennt man also in beiden Fällen alle Elemente der Bahn, welche sich nicht auf ihre Lage im Raume beziehen; mit der Bestimmung dieser letzteren werden wir uns unten in §. 14. beschäftigen.

§. 13.

Wir wollen nun noch ganz in der Kürze zeigen, wie man sich, nachdem man mittelst des in §. 11. entwickelten Verfahrens die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; r_1, r_2, r_3; f_1, f_2, f_3; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 bereits mit einem grossen Grade der Annäherung gefunden hat, der in §. 12. und früher in §. 10. bewiesenen Formeln bedienen kann, um nach und nach sowohl die vorher genannten Grössen, als auch die nicht auf die Lage der Ebene der Bahn im Raume sich beziehenden Elemente derselben mit einem immer grösseren und grösseren Grade der Genauigkeit zu finden.

Mittelst der gefundenen Näherungswerthe der obigen Grössen berechne man A nach einer der drei Formeln 68), und dann $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ mittelst einer der Formeln 73), 74), 78), 79). Dann bestimme man, indem man diesen Werth von $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ in die zweite der Gleichungen 45) einführt, und hiebei beachtet, dass ein kleiner noch in $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ steckender Fehler, wegen der Kleinheit des Gliedes

$$\frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1 - \tau_3)}{2r_2{}^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

welches in Bezug auf die Grösse k von der dritten Ordnung ist, an sich, nur einen sehr geringen Einfluss ausüben kann, ϱ_2 und r_2 so, dass den Gleichungen 45) und 44) vollständig genügt wird, wobei man sich verschiedener Methoden bedienen kann, die im Ganzen so einfach und so bekannt sind, dass über dieselben etwas Weiteres hier nicht gesagt zu werden braucht; immer aber wird diese Bestimmung der Grössen ϱ_2 und r_2 leicht und ohne alle

Weitläufigkeit ausgeführt werden können, weil man deren Werthe bereits aus der früheren Rechnung mit grosser Annäherung kennt.

Dann kann man mittelst der gefundenen Werthe von ϱ_2 und r_2 ganz auf dieselbe Weise zu einem neuen Näherungswerthe von $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ übergehen, denselben in die zweite der Gleichungen 45) einführen, und ϱ_2 und r_2 so bestimmen, dass den Gleichungen 45) und 44) vollständig genügt wird, ein Verfahren, welches man überhaupt so lange fortsetzt, bis zwei auf einander folgende Systeme von Werthen der Grössen ϱ_2, r_2 in der verlangten Anzahl von Decimalstellen sich nicht mehr von einander unterscheiden.

Nun setzt man die Rechnung in der Weise fort, dass man mittelst der jetzt gefundenen Werthe der vorher in die Rechnung gezogenen Grössen auch $\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}$ nach der ersten der Formeln 80) berechnet, diese Grösse von nun an in die Rechnung hineinzieht, und ϱ_2 und r_2 so bestimmt, dass den Gleichungen 43) und 44) vollständig genügt wird, mittelst welcher Werthe von ϱ_2 und r_2 man dann auf dieselbe Weise neue Näherungswerthe dieser Grössen findet, und die Rechnung wieder so lange fortsetzt, bis zwei auf einander folgende Systeme von Werthen derselben in der verlangten Anzahl von Decimalstellen sich nicht mehr von einander unterscheiden, wobei es sich von selbst versteht, dass man bei der Berechnung der Grössen f_1, f_2, f_3 sich stets der Formeln 43) zu bedienen hat.

Ganz in ähnlicher Weise, was nun eine weitere Erläuterung nicht mehr bedürfen wird, kann man mittelst der zweiten der Formeln 80) ferner auch die Grösse $\frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}$ in die Rechnung hineinziehen, und ϱ_2 und r_2 so bestimmen, dass den Gleichungen 37) und 43) mit Rücksicht auf die hierbei zur Anwendung kommenden Formeln 36) vollständig genügt wird, wobei man sich im Allgemeinen immer ganz eben so zu verhalten hat, wie in den beiden vorhergehenden Fällen.

Wie weit man aber überhaupt auf dem im Allgemeinen hier vorgezeichneten Wege fortschreiten muss, wird immer von der Genauigkeit abhängen, die man bei diesen Rechnungen zu erreichen beabsichtigt, so dass sich darüber also allgemeine Regeln natürlich gar nicht geben lassen.

Wie endlich, nachdem man in der vorhergehenden Rechnung

die beabsichtigte Genauigkeit erreicht hat, dann ferner die nicht auf die Lage der Ebene der Bahn im Raume sich beziehenden Elemente derselben zu berechnen sind, erhellet aus §. 12. ganz von selbst und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht.

§. 14.

Wir wollen jetzt zeigen, wie sich die Elemente der Bahn bestimmen lassen, welche sich auf ihre Lage im Raume beziehen.

Bezeichnen wir zu dem Ende einen beliebigen Vector und die entsprechende curtirte Entfernung unsers Weltkörpers von der Erde respective durch r und ϱ, die entsprechende geocentrische Länge und Breite desselben durch λ und β, die entsprechende heliocentrische Länge der Erde und ihren entsprechenden Vector durch L und R, endlich die entsprechende heliocentrische Länge und Breite des Weltkörpers durch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$; so haben wir offenbar die folgenden Gleichungen:

$$92) \ldots x = r\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y = r\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z = r\sin\mathfrak{B}.$$

Nun ist aber nach 6) bekanntlich:

$$X = R\cos L,\quad Y = R\sin L;$$

ferner nach 7):

$$x' = \varrho\cos\lambda,\quad y' = \varrho\sin\lambda,\quad z' = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta;$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x = X + x',\quad y = Y + y',\quad z = z';$$

also nach 92):

$$93) \ldots \begin{cases} r\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = R\cos L + \varrho\cos\lambda, \\ r\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = R\sin L + \varrho\sin\lambda, \\ r\sin\mathfrak{B} = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta; \end{cases}$$

oder auch, wie man leicht findet, wenn man die erste und zweite Gleichung respective mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$, ferner mit $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ multiplicirt, und dann diese Gleichungen im ersten Falle zu einander addirt, im zweiten Falle von einander subtrahirt:

$$94)\quad .\quad \begin{cases} r\cos(\mathfrak{L}-\lambda)\cos\mathfrak{B} = R\cos(L-\lambda)+\varrho, \\ r\sin(\mathfrak{L}-\lambda)\cos\mathfrak{B} = R\sin(L-\lambda), \\ r\sin\mathfrak{B} = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 93) erhält man zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ die folgenden Formeln:

$$95)\quad .\ .\ .\ .\ \begin{cases} \sin\mathfrak{B} = \dfrac{\varrho}{r}\mathrm{tang}\,\beta, \\ \sin\mathfrak{L} = \dfrac{R\sin L+\varrho\sin\lambda}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \cos\mathfrak{L} = \dfrac{R\cos L+\varrho\cos\lambda}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \mathrm{tang}\,\mathfrak{L} = \dfrac{R\sin L+\varrho\sin\lambda}{R\cos L+\varrho\cos\lambda}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert $\mathfrak{B}$ ohne alle Zweideutigkeit, weil $\mathfrak{B}$ zwischen -90^0 und $+90^0$ liegt. Eben deshalb ist $\cos\mathfrak{B}$ stets positiv, und $\sin\mathfrak{L}$ und $\cos\mathfrak{L}$ haben daher jederzeit mit den Zählern der sie darstellenden obigen Brüche gleiche Vorzeichen. Bedient man sich nun zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ der letzten der vier obigen Formeln, welche diese heliocentrische Länge durch ihre Tangente giebt, so muss man rücksichtlich der Art und Weise, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, die in dem folgenden Tableau enthaltenen Regeln befolgen, wobei sich die Ausdrücke Zähler und Nenner auf den Zähler und Nenner des Bruchs in der vierten der vorstehenden Formeln beziehen:

Zähler:	Nenner:	
positiv	positiv	$0 < \mathfrak{L} < 90^0$
positiv	negativ	$90^0 < \mathfrak{L} < 180^0$
negativ	negativ	$180^0 < \mathfrak{L} < 270^0$
negativ	positiv	$270^0 < \mathfrak{L} < 360^0$.

Diese Regeln lassen über die Art und Weise, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, nicht die geringste Zweideutigkeit zu.

Aus den Gleichungen 94) ergeben sich zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ die folgenden Formeln:

96) . . .
$$\left\{\begin{aligned} \sin\mathfrak{B} &= \frac{\varrho}{r}\operatorname{tang}\beta, \\ \sin(\mathfrak{L}-\lambda) &= \frac{R\sin(L-\lambda)}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \cos(\mathfrak{L}-\lambda) &= \frac{R\cos(L-\lambda)+\varrho}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \operatorname{tang}(\mathfrak{L}-\lambda) &= \frac{R\sin(L-\lambda)}{R\cos(L-\lambda)+\varrho}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln gestatten eine etwas leichtere Rechnung wie die Formeln 95); aber so leichte Regeln wie vorher rücksichtlich der Art und Weise, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, lassen sich nicht geben. Ich will annehmen, dass man sich bei der Berechnung von $\mathfrak{L}$ der Formel

$$\sin(\mathfrak{L}-\lambda) = \frac{R\sin(L-\lambda)}{r\cos\mathfrak{B}}$$

bediene, welche offenbar die leichteste Rechnung gestattet, und will demzufolge setzen, dass Θ der, absolut genommen, kleinste, also $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigende Werth von $\mathfrak{L}-\lambda$ sei, welcher der vorstehenden Gleichung genügt. Dann ist, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$\mathfrak{L}-\lambda = 2n\pi+\Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}-\lambda = (2n+1)\pi-\Theta$$

zu setzen. Ob man das Erste oder Zweite zu thun hat, entscheidet sich nach dem Zeichen von $\cos(\mathfrak{L}-\lambda)$, welcher Cosinus mit dem Zähler des Bruchs in der Formel

$$\cos(\mathfrak{L}-\lambda) = \frac{R\cos(L-\lambda)+\varrho}{r\cos\mathfrak{B}}$$

gleiches Vorzeichen hat, so dass also das Zeichen dieses Cosinus immer leicht beurtheilt werden kann; ist nun der Zähler dieses Bruchs positiv, so muss man

$$\mathfrak{L}-\lambda = 2n\pi+\Theta$$

setzen, weil für

$$\mathfrak{L}-\lambda = (2n+1)\pi-\Theta$$

der Cosinus von $\mathfrak{L}-\lambda$ offenbar negativ sein würde; ist dagegen der Zähler des obigen Bruchs negativ, so muss man

$$\mathfrak{L}-\lambda = (2n+1)\pi-\Theta$$

setzen, weil für

$$\mathfrak{L} - \lambda = 2n\pi + \Theta$$

der Cosinus von $\mathfrak{L} - \lambda$ offenbar positiv sein würde. Wir wollen nun zuerst annehmen, dass sich hiernach

$$\mathfrak{L} - \lambda = 2n\pi + \Theta$$

ergeben habe. Offenbar kann man, Θ mag positiv oder negativ sein, nicht

$$n = \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 4, \quad \pm 5, \ldots.$$

setzen, weil sonst der absolute Werth von $\mathfrak{L} - \lambda$ grösser als 2π sein würde, was nicht möglich ist. Wir können also nur

$$n = 0, \quad \pm 1$$

setzen. Ist nun Θ positiv, so kann man nicht $n = +1$ setzen, weil sonst $\mathfrak{L} - \lambda = 2n\pi + \Theta$ grösser als 2π wäre, und man kann also in diesem Falle bloss $n = 0$ oder $n = -1$, folglich

$$\mathfrak{L} - \lambda = \Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} - \lambda = -2\pi + \Theta,$$

also

$$\mathfrak{L} = \lambda + \Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} = \lambda + \Theta - 2\pi$$

setzen; jenachdem nun aber $\lambda + \Theta$ kleiner oder grösser als 2π ist, muss man offenbar

$$\mathfrak{L} = \lambda + \Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} = \lambda + \Theta - 2\pi$$

setzen. Wenn ferner Θ negativ ist, so kann man nicht $n = -1$ setzen, weil sonst der absolute Werth von $\mathfrak{L} - \lambda = -2\pi + \Theta$ grösser als 2π wäre, und man kann also bloss $n = 0$ oder $n = +1$, folglich

$$\mathfrak{L} - \lambda = \Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} - \lambda = 2\pi + \Theta,$$

also

$$\mathfrak{L} = \lambda + \Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} = \lambda + \Theta + 2\pi$$

setzen; jenachdem nun aber $\lambda + \Theta$ positiv oder negativ ist, muss man offenbar

$$\mathfrak{L} = \lambda + \Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} = \lambda + \Theta + 2\pi$$

setzen. Ferner wollen wir annehmen, dass sich nach dem Obigen

$$\mathfrak{L} - \lambda = (2n+1)\pi - \Theta$$

ergeben habe. Offenbar kann man, Θ mag positiv oder negativ sein, nicht

$$n = +1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5, \ldots.$$

setzen, weil sonst der absolute Werth von $\mathfrak{L} - \lambda$ offenbar grösser als 2π sein würde, was nicht möglich ist. Man kann also nur

$$n = 0,\ -1,$$

also

$$\mathfrak{L} - \lambda = \pi - \Theta \text{ oder } \mathfrak{L} - \lambda = -\pi - \Theta,$$

folglich

$$\mathfrak{L} = \lambda - \Theta + \pi \text{ oder } \mathfrak{L} = \lambda - \Theta - \pi$$

setzen. Ist nun $\lambda - \Theta$ positiv, so muss man

$$\mathfrak{L} = \lambda - \Theta + \pi \text{ oder } \mathfrak{L} = \lambda - \Theta - \pi$$

setzen, jenachdem $\lambda - \Theta$ kleiner oder grösser als π ist; ist dagegen $\lambda - \Theta$ negativ, so kann man nur

$$\mathfrak{L} = \lambda - \Theta + \pi$$

setzen. Die vorhergehenden Regeln sind allerdings völlig bestimmt, und lassen eine Zweideutigkeit, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, nicht zu; aber an Einfachheit stehen sie den oben im ersten Falle gegebenen Regeln offenbar nach.

Noch leitet man aus den Gleichungen 93) leicht die folgenden Gleichungen ab:

$$97) \quad \left\{ \begin{array}{l} r\cos(\mathfrak{L} - L)\cos\mathfrak{B} = \varrho\cos(\lambda - L) + R, \\ r\sin(\mathfrak{L} - L)\cos\mathfrak{B} = \varrho\sin(\lambda - L), \\ r\sin\mathfrak{B} = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta; \end{array} \right.$$

aus denen sich die nachstehenden Formeln:

$$98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\mathfrak{B} = \dfrac{\varrho}{r}\mathrm{tang}\,\beta, \\ \sin(\mathfrak{L} - L) = \dfrac{\varrho\sin(\lambda - L)}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \cos(\mathfrak{L} - L) = \dfrac{\varrho\cos(\lambda - L) + R}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \mathrm{tang}(\mathfrak{L} - L) = \dfrac{\varrho\sin(\lambda - L)}{\varrho\cos(\lambda - L) + R} \end{array} \right.$$

ergeben, bei deren Anwendung man, wie $\mathfrak{L}$ zu nehmen ist, ganz nach ähnlichen Regeln wie vorher zu beurtheilen hat, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Nach den vorhergehenden Formeln kann man für alle drei Beobachtungen die heliocentrischen Längen und Breiten

$$\mathfrak{L}_1, \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{L}_2, \mathfrak{B}_2; \quad \mathfrak{L}_3, \mathfrak{B}_3$$

des Weltkörpers, um dessen Bahnbestimmung es sich handelt, berechnen.

Wenn

L_1, L_2, L_3		$\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$
wachsen		wachsen
abnehmen	und respective	abnehmen

so ist der Weltkörper rechtläufig; wenn dagegen

L_1, L_2, L_3		$\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$
wachsen		abnehmen
abnehmen	und respective	wachsen

so ist der Weltkörper rückläufig.

Wir wollen nun durch die Sonne als Anfang ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x''y''z''$ legen; die Ebene der $x''y''$ sei die Ebene der Ekliptik, und der positive Theil der Axe der x'' sei nach dem aufsteigenden Knoten unsers Weltkörpers hin gerichtet; der positive Theil der Axe der y'' werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x'' durch den rechten Winkel $(x''y'')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y'' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher hin die Längen gezählt werden; der positive Theil der Axe der z'' soll mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen. Bezeichnet dann Ω die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens unsers Weltkörpers, so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$x = x'' \cos\Omega - y'' \sin\Omega,$$
$$y = x'' \sin\Omega + y'' \cos\Omega,$$
$$z = z'';$$

also nach 92):

$$r \cos\mathfrak{L} \cos\mathfrak{B} = x'' \cos\Omega - y'' \sin\Omega,$$
$$r \sin\mathfrak{L} \cos\mathfrak{B} = x'' \sin\Omega + y'' \cos\Omega,$$
$$r \sin\mathfrak{B} = z'';$$

woraus sich, wenn man x'' eliminirt, sogleich die folgenden Gleichungen ergeben:

$$r\sin(\mathfrak{L}-\Omega)\cos\mathfrak{B}=y'',$$

$$r\sin\mathfrak{B}=z''.$$

Bezeichnet nun aber i *) den 90^0 nicht übersteigenden Neigungswinkel der Ebene der Bahn unsers Weltkörpers gegen die Ebene der Ekliptik, die sogenannte Neigung der Bahn; so erhellet leicht, dass in völliger Allgemeinheit

$$z''=\pm y''\,\mathrm{tang}\,i,\quad\text{also}\quad y''=\pm z''\cot i$$

ist, wenn man hier und im Folgenden immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Also ist nach dem Obigen:

$$y''=\pm r\sin\mathfrak{B}\cot i,$$

und folglich

$$\sin(\mathfrak{L}-\Omega)\cos\mathfrak{B}=\pm\sin\mathfrak{B}\cot i$$

oder

$$\mathrm{tang}\,i\sin(\mathfrak{L}-\Omega)=\pm\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B};$$

und nehmen wir nun die der ersten und dritten Beobachtung entsprechenden heliocentrischen Längen und Breiten $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{B}_3$; so haben wir zur Bestimmung von Ω und i die folgenden Gleichungen:

$$99)\quad \begin{cases}\mathrm{tang}\,i\sin(\mathfrak{L}_1-\Omega)=\pm\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_1,\\ \mathrm{tang}\,i\sin(\mathfrak{L}_3-\Omega)=\pm\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_3;\end{cases}$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Durch Division ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{\sin(\mathfrak{L}_1-\Omega)}{\sin(\mathfrak{L}_3-\Omega)}=\frac{\sin\mathfrak{L}_1-\cos\mathfrak{L}_1\,\mathrm{tang}\,\Omega}{\sin\mathfrak{L}_3-\cos\mathfrak{L}_3\,\mathrm{tang}\,\Omega}=\frac{\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_1}{\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_3},$$

folglich:

$$100)\quad \mathrm{tang}\,\Omega=\frac{\sin\mathfrak{L}_1\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_3-\sin\mathfrak{L}_3\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_1}{\cos\mathfrak{L}_1\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_3-\cos\mathfrak{L}_3\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}_1}.$$

Diese Formel liefert für das zwischen 0 und 360^0 liegende Ω zwei um 180^0 von einander verschiedene Werthe; welchen die-

---

*) Nicht völlig übereinstimmend mit der dem i früher beigelegten Bedeutung.

ser beiden Werthe man zu nehmen hat, kann auf folgende Art entschieden werden.

Zur Berechnung von i hat man nach 99) die folgenden Formeln:

$$101) \quad \ldots \quad \text{tang} i = \pm \frac{\text{tang}\, \mathfrak{B}_1}{\sin(\mathfrak{L}_1 - \Omega)} = \pm \frac{\text{tang}\, \mathfrak{B}_3}{\sin(\mathfrak{L}_3 - \Omega)},$$

immer die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Nun erhellet aber leicht, dass in beiden Fällen die zwei obigen Werthe der heliocentrischen Länge des aufsteigenden Knotens für tang$i$ Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern. Weil aber i positiv und nicht grösser als 90^0 ist, so ist tang$i$ stets positiv, und man muss also für die Länge des aufsteigenden Knotens immer denjenigen der beiden obigen Werthe nehmen, welcher tang$i$ positiv liefert, mag nun der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig sein. Hiernach können also Ω und i immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden.

Aus der Gleichung

$$\frac{\sin(\mathfrak{L}_1 - \Omega)}{\sin(\mathfrak{L}_3 - \Omega)} = \frac{\text{tang}\, \mathfrak{B}_1}{\text{tang}\, \mathfrak{B}_3}$$

erhält man nach einem bekannten Verfahren auch leicht die Formel

$$102) \quad \text{tang}\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) - \Omega\} = \frac{\sin(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_3)}{\sin(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_3)} \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_3),$$

welche für das zwischen 0 und 360^0 liegende Ω wieder zwei um 180^0 verschiedene Werthe liefert, über die man ganz auf dieselbe Weise wie vorher entscheiden kann.

Wir wollen nun in der Ebene der Bahn durch die Sonne als Anfang ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $x'''y'''$ legen, und wollen den positiven Theil der Axe der x''' mit dem positiven Theile der Axe der x'' zusammenfallen lassen, den positiven Theil der Axe der y''' aber so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x''' durch den rechten Winkel $(x'''y''')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y''' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher sich der Weltkörper in seiner Bahn bewegt. Bezeichnen wir dann zu irgend einer Zeit das sogenannte Argument der Breite des Weltkörpers durch V, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x''' = r \cos \mathrm{V}, \quad y''' = r \sin \mathrm{V}.$$

Eben so leicht erhellet aber auch die Richtigkeit der Gleichungen:

$$x'' = x''', \quad y'' = \pm y''' \cos i,$$

wenn man wie früher das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Also ist:

$$x'' = r \cos V, \quad y'' = \pm r \sin V \cos i;$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$r \cos \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega,$$

$$r \sin \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega$$

ist:

$$\cos \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = \cos \Omega \cos V \mp \cos i \sin \Omega \sin V,$$

$$\sin \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = \sin \Omega \cos V \pm \cos i \cos \Omega \sin V.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\cos V = \cos(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B},$$

$$\pm \cos i \sin V = \sin(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B};$$

also:

$$103) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin V = \pm \dfrac{\sin(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B}}{\cos i}, \\ \cos V = \cos(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B}, \\ \operatorname{tang} V = \pm \dfrac{\operatorname{tang}(\mathfrak{L} - \Omega)}{\cos i}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln das Argument der Breite sich ohne alle Zweideutigkeit bestimmen lässt, weil man aus den Vorzeichen seines Sinus und Cosinus immer den Quadranten bestimmen kann, in welchem es sich endigen muss.

Unter der Länge unsers Weltkörpers in der Bahn, welche wir durch L bezeichnen wollen, versteht man bekanntlich die Grösse

$$104) \quad \ldots \ldots \ldots \quad L = \Omega + V,$$

und kann dieselbe also aus der heliocentrischen Länge des aufsteigenden Knotens und dem Argumente der Breite immer leicht durch eine blosse Addition finden.

Durch jede einer gewissen Zeit entsprechende wahre Anomalie v ist offenbar die Lage des Perihelіums in der Bahn bestimmt. Bezeichnen wir aber die im Sinne der Bewegung des

Weltkörpers in seiner Bahn genommene anguläre Entfernung des Perihelіums vom aufsteigenden Knoten durch P, so ist offenbar

105) . . . $P = V - v$ oder $P = V - v + 360^o$,

jenachdem $V - v$ positiv oder negativ ist; also ist

106) . . . $v = V - P$ oder $v = V - P + 360^o$,

jenachdem $V - P$ positiv oder negativ ist, und

107) . . . $V = v + P$ oder $V = v + P - 360^o$,

jenachdem $v + P$ kleiner oder grösser als 360^o ist.

§. 15.

Ich will nun noch zeigen, wie aus den gefundenen Elementen der Bahn die geocentrische Länge und Breite des Weltkörpers für die Zeit der zweiten Beobachtung berechnet werden kann, weil die Vergleichung dieser aus den Elementen berechneten geocentrischen Länge und Breite mit der entsprechenden beobachteten geocentrischen Länge und Breite das schärfste Kriterium für die bei der Bestimmung der Bahn erreichte Genauigkeit abgiebt.

Aus der bekannten Zeit des Durchgangs des Weltkörpers durch das Perihelium und der Zeit der zweiten Beobachtung findet man leicht die seit dem Durchgange durch das Perihelium bis zu dem Momente der zweiten Beobachtung verflossene Zeit, welche wir jetzt, wie schon früher in §. 12., durch t_2 bezeichnen wollen. Dann findet man bei elliptischen Bahnen durch Auflösung der aus §. 12. 87) bekannten transcendenten Gleichung

$$t_2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(u_2 - e\sin u_2)$$

die excentrische Anomalie u_2, und hierauf mittelst der aus §. 12. 85) bekannten Formel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v_2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u_2$$

oder einer anderen der zu diesem Zweck dienenden bekannten Formeln die wahre Anomalie v_2; bei parabolischen Bahnen ergiebt sich die wahre Anomalie v_2 unmittelbar durch Auflösung der aus §. 12. 91) bekannten cubischen Gleichung

$$t_2 = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2k}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v_2{}^3).$$

Bezeichnet nun P den bekannten Abstand des Perihe liums vom aufsteigenden Knoten und V_2 das Argument der Breite des Weltkörpers zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist nach §. 14. 107) bekanntlich

$$V_2 = v_2 + P \quad \text{oder} \quad V_2 = v_2 + P - 360^0,$$

jenachdem $v_2 + P$ kleiner oder grösser als 360^0 ist.

Ist jetzt Ω die bekannte heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens, und i die gleichfalls bekannte Neigung der Bahn, so hat man zur Berechnung der heliocentrischen Länge $\mathfrak{L}_2$ und heliocentrischen Breite $\mathfrak{B}_2$ nach 103) die folgenden Formeln:

$$\sin V_2 = \pm \frac{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)\cos \mathfrak{B}_2}{\cos i},$$

$$\cos V_2 = \cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)\cos \mathfrak{B}_2,$$

$$\operatorname{tang} V_2 = \pm \frac{\operatorname{tang}(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}{\cos i};$$

in denen man die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen hat, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Aus der dritten dieser Gleichungen ergiebt sich zur Berechnung von $\mathfrak{L}_2$ die Formel

$$\operatorname{tang}(\mathfrak{L}_2 - \Omega) = \pm \cos i \operatorname{tang} V_2,$$

und aus den beiden ersten Gleichungen erhält man zur Berechnung von $\mathfrak{B}_2$ die Formeln

$$\cos \mathfrak{B}_2 = \pm \frac{\cos i \sin V_2}{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}, \quad \cos \mathfrak{B}_2 = \frac{\cos V_2}{\cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}.$$

Die Formel

$$\operatorname{tang}(\mathfrak{L}_2 - \Omega) = \pm \cos i \operatorname{tang} V_2$$

lässt bei der Bestimmung von $\mathfrak{L}_2$ eine Zweideutigkeit zu, über welche auf folgende Art entschieden werden kann. Ist nämlich überhaupt U ein dieser Gleichung genügender Werth von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$, so ist bekanntlich, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\mathfrak{L}_2 - \Omega = U + n\pi,$$

also

$$\mathfrak{L}_2 = \Omega + U + n\pi.$$

Nun ist aber immer

$$0 < \mathfrak{L}_2 < 2\pi,$$

also

$$0 < \Omega + U + n\pi < 2\pi,$$

folglich

$$-(\Omega + U) < n\pi < 2\pi - (\Omega + U),$$

und hieraus:

$$-\frac{\Omega + U}{\pi} \leq n < 2 - \frac{\Omega + U}{\pi}.$$

Weil nun

$$2 - \frac{\Omega + U}{\pi} - (-\frac{\Omega + U}{\pi}) = 2$$

ist, so liegen zwischen

$$-\frac{\Omega + U}{\pi} \text{ und } 2 - \frac{\Omega + U}{\pi}$$

immer nur zwei ganze um die Einheit von einander verschiedene Werthe von n, welche mittelst der Bedingung

$$-\frac{\Omega + U}{\pi} < n < 2 - \frac{\Omega + U}{\pi}$$

immer leicht bestimmt werden können, worauf sich dann mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{L}_2 - \Omega = U + n\pi$$

zwei um π von einander verschiedene Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ ergeben, und es sich jetzt also nur noch frägt, welchen dieser beiden Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ man zu nehmen hat. Es ist aber klar, dass der eine dieser beiden Werthe für

$$\cos \mathfrak{B}_2 = \pm \frac{\cos i \sin V_2}{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)} = \frac{\cos V_2}{\cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}$$

immer einen positiven, der andere einen negativen Werth liefert; und da nun $\cos \mathfrak{B}_2$, weil der absolute Werth von $\mathfrak{B}_2$ nie 90^0 übersteigt, stets positiv ist, so kann nie ein Zweifel bleiben, welchen der beiden aus dem Obigen sich ergebenden Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ man zu nehmen hat, worauf sich dann natürlich auch $\mathfrak{L}_2$ leicht ohne alle Zweideutigkeit ergiebt, indem man Ω zu diesem Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ addirt. Hat man aber auf diese Weise $\mathfrak{L}_2$ bestimmt, so ist es nicht zweckmässig, die heliocentrische Breite $\mathfrak{B}_2$ mittelst einer der Formeln

$$\cos \mathfrak{B}_2 = \pm \frac{\cos i \sin V_2}{\sin (\mathfrak{L}_2 - \Omega)}, \quad \cos \mathfrak{B}_2 = \frac{\cos V_2}{\cos (\mathfrak{L}_2 - \Omega)}$$

zu berechnen, weil diese Formeln es unentschieden lassen, ob $\mathfrak{B}_2$, welches, absolut genommen, 90^0 nicht übersteigt, positiv oder negativ ist. Nach 99) hat man aber zur Bestimmung von $\mathfrak{B}_2$ auch die Formel

$$\text{tang}\, \mathfrak{B}_2 = \pm \text{tang}\, i \sin (\mathfrak{L}_2 - \Omega),$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist, welche, weil

$$-90^0 < \mathfrak{B}_2 < +90^0$$

ist, nie eine Zweideutigkeit lässt, wie man $\mathfrak{B}_2$ zu nehmen hat.

Den Vector r_2 erhält man bei der elliptischen Bahn mittelst der Formel

$$r_2 = a(1 - e \cos u_2),$$

bei der parabolischen Bahn mittelst der Formel

$$r = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} v_2{}^2};$$

und sind nun wie früher x_2, y_2, z_2 die heliocentrischen Coordinaten des Weltkörpers zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist

$$x_2 = r_2 \cos \mathfrak{L}_2 \cos \mathfrak{B}_2,$$

$$y_2 = r_2 \sin \mathfrak{L}_2 \cos \mathfrak{B}_2,$$

$$z_2 = r_2 \sin \mathfrak{B}_2.$$

Die heliocentrischen Coordinaten der Erde zu derselben Zeit sind

$$X_2 = R_2 \cos L_2, \quad Y_2 = R_2 \sin L_2.$$

Hieraus findet man die geocentrischen Coordinaten x_2', y_2', z_2' des Weltkörpers zur Zeit der zweiten Beobachtung mittelst der Formeln:

$$x_2' = x_2 - X_2, \quad y_2' = y_2 - Y_2, \quad z_2' = z_2 - Z_2.$$

Bezeichnen aber wie früher λ_2, β_2 die geocentrische Länge und Breite des Weltkörpers und ϱ_2 seine curtirte Entfernung von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist nach 7):

$$x_2' = \varrho_2 \cos \lambda_2, \quad y_2' = \varrho_2 \sin \lambda_2, \quad z_2' = \varrho_2 \text{tang}\, \beta_2;$$

woraus sich

$$\text{tang}\,\lambda_2 = \frac{y_2'}{x_2'}, \quad \varrho_2 = \frac{x_2'}{\cos\lambda_2} = \frac{y_2'}{\sin\lambda_2}$$

ergiebt. Die erste dieser Formeln liefert für das zwischen 0 und 360° liegende λ_2 zwei um 180° verschiedene Werthe; für den einen dieser beiden Werthe ist aber ϱ_2 offenbar immer positiv, für den anderen negativ; und da nun ϱ_2 seiner Natur nach nur positiv sein kann, so muss man für λ_2 immer den der beiden in Rede stehenden Werthe nehmen, welcher ϱ_2 positiv liefert. Uebrigens aber wird auf der Stelle auch die Richtigkeit der folgenden Regeln erhellen:

Wenn

x_2'	y_2'		
positiv	positiv		$0 < \lambda < 90^0$
negativ	positiv		$90^0 < \lambda < 180^0$
negativ	negativ	ist, so ist	$180^0 < \lambda < 270^0$
positiv	negativ		$270^0 < \lambda < 360^0$.

Die Formeln

$$\text{tang}\,\beta_2 = \frac{z_2'}{\varrho_2} = \frac{z_2'}{x_2'}\cos\lambda_2 = \frac{z_2'}{y_2'}\sin\lambda_2$$

liefern das zwischen -90^0 und $+90^0$ liegende β_2 immer ohne alle Zweideutigkeit.

Bezeichnet $\mathfrak{R}_2$ die Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist

$$\varrho_2 = \mathfrak{R}_2\cos\beta_2, \text{ also } \mathfrak{R}_2 = \frac{\varrho_2}{\cos\beta_2};$$

mittelst welcher Formel auch $\mathfrak{R}_2$ leicht gefunden werden kann.

Anhang.

Wenn ich auch im Vorhergehenden alle Formeln so weit entwickelt habe, dass über die Art der Anwendung derselben und den Erfolg dieser Anwendung nach meiner Meinung kein Zweifel obwalten kann, so möchte es doch gut und zweckmässig sein, die Auflösung der Gleichung 57) oder 58), auf die bekanntlich hier zunächst Alles ankommt, durch ein Beispiel etwas näher zu erläutern, und daran einige Bemerkungen, namentlich über die verschiedenen reellen Wurzeln, welche diese Gleichung haben kann, zu knüpfen, ohne eine vollständige Berechnung dieses Beispiels mitzutheilen, die nach den obigen vollständig ausgeführten analy-

tischen Entwickelungen in der That als überflüssig erscheint. Ich wähle zu einem solchen Beispiel die folgenden Beobachtungen der Vesta *):

$\lambda_1 = 174^0.\ 7'.\ 33'',2$ $\quad L_1 = 213^0.\ 42'.\ 55'',5$
$\lambda_2 = 173.\ 44.\ 21,3$ $\quad L_2 = 218.\ 33.\ 22,4$
$\lambda_3 = 173.\ 33.\ 33,0$ $\quad L_3 = 223.\ 23.\ 15,5$

$\beta_1 = +11^0.\ 37'.\ 24'',1$ $\quad \log R_1 = 0,0028540$
$\beta_2 = \ 11.\ 19.\ 42,6$ $\quad \log R_2 = 0,0034240$
$\beta_3 = \ 11.\ \ 0.\ 39,2$ $\quad \log R_3 = 0,0039670$

$\tau_1 = 4,9855208$
$\tau_2 = 9,9705405$ $\quad \log . k^2 = 0,4711629 - 4.$
$\tau_3 = 4,9850197$

Die Zeiten der drei Beobachtungen waren:

1807.	24.	April.	$9^u.$	$5^m.$	$16^s,5$
	29.	April.	8.	43.	42,2
	4.	Mai.	8.	22.	51,2

} Mittlere Zeit zu Paris.

Man berechne nun zuerst die folgenden Logarithmen:

$$\log \tau_1 = 0,6977105$$
$$\log \tau_2 = 0,9987187$$
$$\log \tau_3 = 0,6976669$$

$$\log . \tau_1^{\,2} = 1,3954210$$
$$\log . \tau_2^{\,2} = 1,9974374$$
$$\log . \tau_3^{\,2} = 1,3953338$$

$$\log . \tau_1^{\,3} = 2,0931315$$
$$\log . \tau_2^{\,3} = 2,9961561$$
$$\log . \tau_3^{\,3} = 2,0930007$$

$$\tau_1 = 4,9855208$$
$$\tau_3 = 4,9850197$$
$$\tau_1 - \tau_3 = 0,0005011$$
$$\log (\tau_1 - \tau_3) = 0,6999244 - 4$$

*) M. s. Theoretische und praktische Astronomie von J. J. Littrow. Thl. II. Wien. 1821. S. 139.

$$\log \text{tang}\, \beta_1 = 0{,}3132247 - 1$$
$$\log \text{tang}\, \beta_2 = 0{,}3017612 - 1$$
$$\log \text{tang}\, \beta_3 = 0{,}2890927 - 1$$

$$\log \cos \beta_2 = 0{,}9914552 - 1$$
$$\log . \cos \beta_2^2 = 0{,}9829104 - 1$$

$$\log \sin (\lambda_2 - \lambda_3) = 0{,}4973501 - 3$$
$$\log \sin (\lambda_3 - \lambda_1) = 0{,}9952406 - 3_n$$
$$\log \sin (\lambda_1 - \lambda_2) = 0{,}8291796 - 3$$

Hieraus erhält man:

$$\log . \sin (\lambda_2 - \lambda_3) \text{tang}\, \beta_1 = 0{,}8105748 - 4$$
$$\log . \sin (\lambda_3 - \lambda_1) \text{tang}\, \beta_2 = 0{,}2970018 - 3_n$$
$$\log . \sin (\lambda_1 - \lambda_2) \text{tang}\, \beta_3 = 0{,}1182723 - 3$$

folglich:

$$\sin (\lambda_2 - \lambda_3) \text{tang}\, \beta_1 = + 0{,}0006465094$$
$$\sin (\lambda_3 - \lambda_1) \text{tang}\, \beta_2 = - 0{,}0019815352$$
$$\sin (\lambda_1 - \lambda_2) \text{tang}\, \beta_3 = + 0{,}0013130229,$$

wobei ich bemerke, dass man, was wohl zu beachten ist, die Rechnung jederzeit so genau führen muss, wie es der Gebrauch siebenstelliger Tafeln gestattet. Bei diesen Rechnungen habe ich die treffliche neueste, d. h. vierzigste Auflage des Vega'schen Handbuchs *), durch deren Herausgabe Herr Doctor Bremiker in Berlin sich ein grosses Verdienst erworben hat, benutzt.

Aus den obigen Zahlen findet man die Grösse $\bar{\omega}$, auf deren Bestimmung man jederzeit besondere Sorgfalt verwenden muss, durch die folgende Rechnung:

$$+ 0{,}0006465094$$
$$- 0{,}0019815352$$
$$\overline{- 0{,}0013350258}$$
$$+ 0{,}0013130229$$
$$\overline{- 0{,}0000220029}$$

$$\bar{\omega} = 0{,}0000220029$$
$$\log \bar{\omega} = 0{,}3424799 - 5.$$

---

*) Berlin. 1856. Weidmannsche Buchhandlung.

Ferner berechnet man folgende Logarithmen:

$$\log \sin (L_1 - \lambda_1) = 0{,}8043324 - 1$$
$$\log \sin (L_1 - \lambda_2) = 0{,}8078521 - 1$$
$$\log \sin (L_1 - \lambda_3) = 0{,}8094751 - 1$$

$$\log \sin (L_2 - \lambda_1) = 0{,}8451238 - 1$$
$$\log \sin (L_2 - \lambda_2) = 0{,}8480932 - 1$$
$$\log \sin (L_2 - \lambda_3) = 0{,}8494626 - 1$$

$$\log \sin (L_3 - \lambda_1) = 0{,}8794966 - 1$$
$$\log \sin (L_3 - \lambda_2) = 0{,}8820036 - 1$$
$$\log \sin (L_3 - \lambda_3) = 0{,}8831597 - 1$$

$$\log \cos (L_2 - \lambda_2) = 0{,}8508679 - 1.$$

Hieraus und aus den oben schon berechneten Logarithmen der Tangenten von β_1, β_2, β_3 erhält man:

$$A_1 = 0{,}00418220 \qquad \log A_1 = 0{,}6214048 - 3$$
$$A_2 = 0{,}00450547 \qquad \log A_2 = 0{,}6537402 - 3$$
$$A_3 = 0{,}00479617 \qquad \log A_3 = 0{,}6808946 - 3$$

$$B_1 = -0{,}00864674 \qquad \log B_1 = 0{,}9368524 - 3_n$$
$$B_2 = -0{,}00922876 \qquad \log B_2 = 0{,}9651433 - 3_n$$
$$B_3 = -0{,}00974417 \qquad \log B_3 = 0{,}9887449 - 3_n$$

$$C_1 = 0{,}00448155 \qquad \log C_1 = 0{,}6514283 - 3$$
$$C_2 = 0{,}00473905 \qquad \log C_2 = 0{,}6756913 - 3$$
$$C_3 = 0{,}00496238 \qquad \log C_3 = 0{,}6956900 - 3.$$

Ferner findet man:

$$\Delta_2 = 134^\circ.\ 4'.\ 13'',4$$
$$\log \cos \Delta_2 = 0{,}8423231 - 1_n$$
$$\log \sin \Delta_2 = 0{,}8564183 - 1$$
$$\log . \sin \Delta_2^3 = 0{,}5692549 - 1$$
$$\log \operatorname{tang} \Delta_2 = 0{,}0140952_n$$
$$\log . \cos \beta_2 \cos \Delta_2 = 0{,}8337783 - 1_n$$
$$\cos \Delta_2 = -0{,}69554159.$$

Hieraus erhält man weiter:

$$A = -0{,}043392720$$
$$B = -0{,}092744043$$
$$+0{,}049351323$$
$$C = -0{,}049020618$$
$$+0{,}000330705$$
$$D = -0{,}00015079986$$
$$G = \quad 0{,}000481505 \qquad \log G = 0{,}6826008 - 4$$

$$A' = -1{,}0785442$$
$$B' = -9{,}2198404$$
$$+8{,}1412962$$
$$C' = -1{,}2181832$$
$$+6{,}9231130$$
$$D' = -0{,}014991266$$
$$G' = \quad 6{,}9381043 \qquad \log G' = 0{,}8412409$$

$$\log G_1 = 0{,}1924961 - 4$$
$$\log G_1' = 0{,}1899335 - 2$$

$$\log F = 3{,}8865153 \qquad \log F = 3{,}8865153$$
$$\log G = 0{,}6826008 - 4 \qquad \log G_1 = 0{,}1924961 - 4$$
$$\log G'' = 0{,}5691161 \qquad \log G_1'' = 0{,}0790114.$$

Daher haben wir jetzt die folgenden Logarithmen:

$$\log G'' = 0{,}5691161$$
$$\log G' = 0{,}8412409$$
$$\log G_1'' = 0{,}0790114$$
$$\log G_1' = 0{,}1899335 - 2,$$

welche zur Berechnung der Werthe der Function

$$(G'' - G'u^3)u \mp (G_1'' - G_1'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)}$$

der Gleichung 57) hinreichen, wenn man in dieselbe beliebige Werthe der Grösse u einführt.

Setzt man nun für u nach und nach die Werthe

0, 0; 0, 1; 0, 2; u. s. w. 0, 9; 1, 0;

so erhält man für die entsprechenden Werthe der obigen Function, jenachdem man in derselben das obere oder das untere Zeichen nimmt, das folgende Tableau:

Oberes Zeichen.		Unteres Zeichen.	
u	Function.	u	Function.
0,0	−1,1995307	0,0	+1,1995307
0,1	−0,8234167	0.1	+1,5635887
0,2	−0,4447152	0,2	+1,9056328
0,3	−0,0877397	0,3	+1,2000215
0,4	+0,2070240	0,4	+2,4039840
0,5	+0,3831193	0,5	+2,4574153
0,6	+0,3685514	0,6	+2,2824490
0,7	+0,0767771	0,7	+1,7824633
0,8	−0,5905709	0,8	+0,8393517
0,9	−1,7330146	0,9	−0,6971294
1,0	−3,2303915	1,0	−3,2303915

Hieraus sieht man, dass die Gleichung

$$(G'' - G'u^3)u \mp (G_1'' - G_1'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)} = 0$$

zwischen 0 und 1 drei reelle Wurzeln hat, welche zwischen 0,3 und 0,4; zwischen 0,7 und 0,8; zwischen 0,8 und 0,9 liegen. Wie man sich diesen Wurzeln ferner nähern und dieselben mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit finden kann, ist bekannt genug; wenn nämlich, um nur bei der einfachsten Methode stehen zu bleiben, überhaupt a und b zwei Näherungswerthe einer Wurzel der Gleichung $f(u)=0$ sind, und den Werthen a und b von u die Werthe A und B der Function $f(u)$ entsprechen, so dass $f(a)=A$ und $f(b)=B$ ist, so findet man einen neuen Näherungswerth u der Wurzel unserer Gleichung mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$u = a - \frac{a-b}{A-B}A = b - \frac{a-b}{A-B}B.$$

Nach der Formel 55) liefert das untere Zeichen für v einen negativen Werth, und da nun $\sin \Delta_2$ positiv und $\cos \Delta_2$ negativ ist, so liefert die zweite Formel in 60) in diesem Falle für $\mathfrak{R}_2$ offenbar einen negativen Werth, was unstatthaft ist, und uns daher berechtigt, die zwischen 0,8 und 0,9 liegende Wurzel von unseren ferneren Betrachtungen auszuschliessen, und uns von jetzt an bloss mit den zwischen 0,3 und 0,4 und zwischen 0,7 und 0,8 liegenden Wurzeln zu beschäftigen.

Wenn man aber zuvörderst die zwischen 0,7 und 0,8 liegende

Wurzel durch successive Annäherung genauer berechnet, und daraus dann mittelst der zu diesem Zweck im Obigen entwickelten Formeln die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{R}_2$, der Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, und von ϱ_2, der curtirten Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, ableitet; so findet man, dass diese Werthe sehr klein ausfallen. Nun ist aber klar, dass die beiden Gleichungen unserer Aufgabe, nämlich die Gleichungen:

$$\varrho_2 = \frac{1}{\omega}\{B_1 R_1 \frac{f_1}{f_2} + B_3 R_3 \frac{f_3}{f_2} - B_2 R_2\},$$

$$r_2^2 = R_2^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2 \sec\beta_2^2,$$

die Auflösung $\varrho_2 = 0$ zulassen. Denn für diesen Werth von ϱ_2 wird vermöge der zweiten Gleichung $r_2 = R_2$, und die erste geht dann offenbar in die Gleichung

$$B_1 R_1 \frac{F_1}{F_2} + B_3 R_3 \frac{F_3}{F_2} - B_2 R_2 = 0$$

oder

$$B_1 R_1 F_1 - B_2 R_2 F_2 + B_3 R_3 F_3 = 0$$

über, was nach 14) in der That völlig richtig ist. Wenn nun auch die zweite der beiden, nach Ausschliessung der dritten, noch zulässigen Auflösungen nicht genau $\varrho_2 = 0$ liefert, so liefert sie doch ϱ_2 sehr klein, was darin seine vollständige Erklärung findet und ganz der Natur der Sache gemäss ist, weil die obige Auflösung für jetzt eine blosse Näherung ist, und also auch nur näherungsweise richtige Resultate liefern kann. Jedenfalls wird aber die zweite der beiden obigen noch zulässigen Auflösungen der genauen Auflösung $\mathfrak{R}_2 = 0$ und $\varrho_2 = 0$ entsprechen, was offenbar auch unstatthaft ist, so dass also hiernach bloss noch die erste der beiden in Rede stehenden Auflösungen, nämlich die zwischen 0,3 und 0,4 liegende Wurzel, als zulässig übrig bleibt.

Setzen wir

$$f(u) = (G'' - G' u^3)u - (G_1'' - G_1' u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)},$$

so ist für

$$u = 0{,}3269852 \quad \text{und} \quad u = 0{,}3269853$$

respective

$$f(u) = -0{,}0000004 \quad \text{und} \quad f(u) = +0{,}0000003;$$

also liegt der richtige Werth von u zwischen

0,3269852 und 0,3269853

aber etwas näher bei dem letzteren Werthe, so dass wir

$$u = 0{,}3269853$$

zu setzen haben.

Die weitere Fortsetzung der Rechnung hat nun nicht die geringste Schwierigkeit, da dieselbe ganz auf vollständig entwickelten Formeln beruhet. Ich will jedoch noch kurz anführen, was sich mir bei derselben ergeben hat, bemerke aber, dass die Rechnung nicht mit der grössten Sorgfalt geführt worden ist, da es ja nur auf ein Beispiel zur Erläuterung des Verfahrens ankam.

Mittelst der Formel 55), in derselben das obere Zeichen genommen, habe ich zuerst gefunden:

$$\log v = 0{,}4609172;$$

dann ergaben sich mittelst der Formeln 60):

$$\log r_2 = 0{,}3453141$$
$$\log \mathfrak{R}_2 = 0{,}1436100$$
$$\log \varrho_2 = 0{,}1350652$$

und nach den Formeln 47):

$$\log f_1 = 0{,}6976616$$
$$\log f_2 = 0{,}9985227$$
$$\log f_3 = 0{,}6976179;$$

dann nach 61):

$$\log \varrho_1 = 0{,}1238773$$
$$\log \varrho_3 = 0{,}1474671;$$

so dass wir also haben:

$$\log \varrho_1 = 0{,}1238773$$
$$\log \varrho_2 = 0{,}1350652$$
$$\log \varrho_3 = 0{,}1474671.$$

Dann ergaben sich mittelst der Formeln 63):

$x_1 = -2{,}1603835$	$\log x_1 = 0{,}3345309_n$
$y_1 = -0{,}4226039$	$\log y_1 = 0{,}6259335 - 1_n$
$z_1 = +0{,}2735911$	$\log z_1 = 0{,}4371020 - 1$
$x_2 = -2{,}1448351$	$\log x_2 = 0{,}3313939_n$
$y_2 = -0{,}4793810$	$\log y_2 = 0{,}6806808 - 1_n$
$z_2 = +0{,}2734175$	$\log z_2 = 0{,}4368264 - 1$
$x_3 = -2{,}1288614$	$\log x_3 = 0{,}3281474_n$
$y_3 = -0{,}5357017$	$\log y_3 = 0{,}7289230 - 1_n$
$z_3 = +0{,}2732497$	$\log z_3 = 0{,}4365598 - 1.$

Dann findet man mittelst der Formeln

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \text{und} \quad r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}$$

ferner:

$$\log r_1 = 0{,}3460137$$
$$\log r_3 = 0{,}3448184$$

und hat also:

$$\log r_1 = 0{,}3460137$$
$$\log r_2 = 0{,}3453141$$
$$\log r_3 = 0{,}3448184.$$

Mittelst der zweiten der Formeln 68) ergiebt sich aber:

$$\log A = 0{,}6393653 - 1$$

und mittelst der ersten der Formeln 81*):

$$\log \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = 0{,}7084639 - 4_n.$$

Nun ergiebt sich nach 82):

$$v_2 = 308^{\circ}.\ 35'.\ 16'',92$$

und nach der ersten der Formeln 83):

$$\log B = 0{,}3995523 - 2.$$

Also ist:

$$A = 0{,}43587838,$$
$$B = 0{,}02509298,$$

und, weil $A > B$ ist, ist folglich die Bahn eine Ellipse.

Mittelst der bekannten Formeln

$$a = \frac{A}{(A-B)(A+B)},$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{(A-B)(A+B)}},$$

$$e = \frac{B}{A}, \quad p = \frac{2}{A}$$

erhält man:

$$\log a = 0{,}3620763$$
$$\log b = 0{,}3613555$$
$$\log e = 0{,}7601870 - 2$$
$$\log p = 0{,}6616647.$$

Ich habe auch noch die folgenden Grössen berechnet:

$$\log \frac{k^2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3)}{2 r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = 0{,}5913609 - 10_n$$

$$\log \frac{k^4 \tau_1^2 \tau_2 \tau_3^2}{12 r_2^6} = 0{,}5807335 - 7$$

$$\log \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} = 0{,}2357089 - 6$$

die letzte Grösse nach der ersten der Formeln 80). Man sieht hieraus, wie klein die Grössen sind, von denen hier die Logarithmen angegeben worden sind, was wir hier namentlich mit Rücksicht auf die Gleichungen 45) bemerken.

Die weitere Fortsetzung dieser Rechnungen nach den oben entwickelten Formeln würde für den Zweck, den wir hier durch dieselben zu erreichen beabsichtigen, überflüssig sein und zu viel Raum in Anspruch nehmen.

Drittes Kapitel.

Ueber die scheinbare Bahn eines sich um die Sonne bewegenden Weltkörpers.

§. 1.

In Bezug auf ein beliebiges durch die Sonne als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz haben wir bekanntlich für unseren Weltkörper, dessen Coordinaten in diesem Systeme zur Zeit t durch x, y, z bezeichnet werden mögen, die folgenden Gleichungen:

$$1) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k^2 x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k^2 y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{k^2 z}{r^3} = 0; \end{cases}$$

und wenn nun zu derselben Zeit in demselben Systeme die Coordinaten der Erde durch X, Y, Z bezeichnet werden, so ist ganz eben so:

$$2) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{k^2 X}{R^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{k^2 Y}{R^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{k^2 Z}{R^3} = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt die Entfernung des Weltkörpers von der Erde durch ϱ, und die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die von der Erde nach dem Weltkörper gezogene Gesichtslinie mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, durch θ, ω, $\bar{\omega}$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar:

$$x = X + \varrho\cos\theta, \quad y = Y + \varrho\cos\omega, \quad z = Z + \varrho\cos\bar{\omega}.$$

Beschreiben wir aber um die Erde als Mittelpunkt mit der Längeneinheit als Halbmesser eine Kugelfläche, und bezeichnen die Coordinaten der Projèction des Weltkörpers auf dieser Kugelfläche, nämlich die Coordinaten des Durchschnittspunkts der von der Erde nach dem Weltkörper gezogenen Gesichtslinie mit der in Rede stehenden Kugelfläche, in einem durch die Erde als Anfang gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensysteme durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; so ist offenbar

$$3) \quad \ldots \quad \mathfrak{x} = \cos\theta, \quad \mathfrak{y} = \cos\omega, \quad \mathfrak{z} = \cos\bar{\omega};$$

also nach dem Obigen:

$$4) \quad \ldots \quad x = X + \varrho\mathfrak{x}, \quad y = Y + \varrho\mathfrak{y}, \quad z = Z + \varrho\mathfrak{z};$$

wobei man rücksichtlich der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu bemerken hat, dass nach 3):

$$5) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1,$$

folglich

$$6) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} = 0$$

und

$$7) \quad \ldots \quad \mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + \mathfrak{z}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 = 0$$

ist.

Aus 4) folgt:

$$x - X = \varrho\mathfrak{x}, \quad y - Y = \varrho\mathfrak{y}, \quad z - Z = \varrho\mathfrak{z};$$

also:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2.\varrho x}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2.\varrho y}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2.\varrho z}{\partial t^2};$$

und weil nun nach 1) und 2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right),\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right),\\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)\end{aligned}$$

ist, so ist:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2.\varrho x}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right),\\ \frac{\partial^2.\varrho y}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right),\\ \frac{\partial^2.\varrho z}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right);\end{aligned}\right.$$

also, wenn man die in diesen Gleichungen vorkommenden zweiten Differentialquotienten entwickelt:

$$9)\quad \left\{\begin{aligned}\varrho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+x\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right),\\ \varrho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+y\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right),\\ \varrho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+z\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right).\end{aligned}\right.$$

Wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t},\quad z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t},\quad x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung:

$$10)\quad \varrho\left\{(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t})\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+(z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t})\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right\}$$

$$=k^2\left\{\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right)(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t})+\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right)(z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t})\right.$$

$$\left.+\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})\right\}$$

oder

$$11)\quad \varrho\left\{x\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)+\eta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)\right.$$
$$\left.+\zeta\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\right\}$$
$$=k^2\left\{\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right)\left(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)+\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right)\left(\zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)\left(x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\}.$$

Nach 4) ist:

$$\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}=X\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\varrho}{r^3}x,$$
$$\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}=Y\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\varrho}{r^3}\eta,$$
$$\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}=Z\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\varrho}{r^3}\zeta;$$

also nach 9):

$$\varrho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+x\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=k^2X\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{k^2\varrho}{r^3}x,$$
$$\varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}+\eta\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=k^2Y\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{k^2\varrho}{r^3}\eta,$$
$$\varrho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\zeta\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=k^2Z\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{k^2\varrho}{r^3}\zeta;$$

also, wenn wir

$$12)\quad\begin{cases}A\varrho=2\dfrac{\partial\varrho}{\partial t},\quad B\varrho=\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}+\dfrac{k^2\varrho}{r^3},\quad C\varrho=k^2\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{1}{R^3}\right);\\ \dfrac{\partial\varrho}{\partial t}=\frac{1}{2}A\varrho,\quad \dfrac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=(B-\dfrac{k^2}{r^3})\varrho,\quad k^2\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{1}{R^3}\right)=C\varrho\end{cases}$$

setzen:

$$13)\quad\ldots\quad\begin{cases}A\dfrac{\partial x}{\partial t}+Bx+CX=-\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2},\\ A\dfrac{\partial\eta}{\partial t}+B\eta+CY=-\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\\ A\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+B\zeta+CZ=-\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2};\end{cases}$$

also, wenn man differentiirt:

$$14)\quad \begin{cases} A\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+B\frac{\partial x}{\partial t}+C\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}+x\frac{\partial B}{\partial t}+X\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}, \\ A\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+B\frac{\partial \eta}{\partial t}+C\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}+\eta\frac{\partial B}{\partial t}+Y\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}, \\ A\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}+B\frac{\partial \zeta}{\partial t}+C\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}+\zeta\frac{\partial B}{\partial t}+Z\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3}. \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\eta Z-\zeta Y,\quad \zeta X-xZ,\quad xY-\eta X$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung:

$$(A\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+B\frac{\partial x}{\partial t}+C\frac{\partial X}{\partial t})(\eta Z-\zeta Y)$$

$$+(A\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+B\frac{\partial \eta}{\partial t}+C\frac{\partial Y}{\partial t})(\zeta X-xZ)$$

$$+(A\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}+B\frac{\partial \zeta}{\partial t}+C\frac{\partial Z}{\partial t})(xY-\eta X)$$

$$+\{(\eta Z-\zeta Y)\frac{\partial x}{\partial t}+(\zeta X-xZ)\frac{\partial \eta}{\partial t}+(xY-\eta X)\frac{\partial \zeta}{\partial t}\}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$=-\{(\eta Z-\zeta Y)\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}+(\zeta X-xZ)\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}+(xY-\eta X)\frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3}\}$$

oder:

$$(A\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+B\frac{\partial x}{\partial t})(\eta Z-\zeta Y)$$

$$+(A\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+B\frac{\partial \eta}{\partial t})(\zeta X-xZ)$$

$$+(A\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}+B\frac{\partial \zeta}{\partial t})(xY-\eta X)$$

$$+C\{x(Y\frac{\partial Z}{\partial t}-Z\frac{\partial Y}{\partial t})+\eta(Z\frac{\partial X}{\partial t}-X\frac{\partial Z}{\partial t})+\zeta(X\frac{\partial Y}{\partial t}-Y\frac{\partial X}{\partial t})\}$$

$$+\{(\eta Z-\zeta Y)\frac{\partial x}{\partial t}+(\zeta X-xZ)\frac{\partial \eta}{\partial t}+(xY-\eta X)\frac{\partial \zeta}{\partial t}\}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$=-\{(\eta Z-\zeta Y)\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}+(\zeta X-xZ)\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}+(xY-\eta X)\frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3}\}.$$

Nach I. 4) sind die Grössen

$$Y\frac{\partial Z}{\partial t} - Z\frac{\partial Y}{\partial t},\quad Z\frac{\partial X}{\partial t} - X\frac{\partial Z}{\partial t},\quad X\frac{\partial Y}{\partial t} - Y\frac{\partial X}{\partial t}$$

Constanten, welche wir durch K, K_1, K_2 bezeichnen, und daher

$$15)\ \ldots\ldots \begin{cases} Y\frac{\partial Z}{\partial t} - Z\frac{\partial Y}{\partial t} = K, \\ Z\frac{\partial X}{\partial t} - X\frac{\partial Z}{\partial t} = K_1, \\ X\frac{\partial Y}{\partial t} - Y\frac{\partial X}{\partial t} = K_2 \end{cases}$$

setzen wollen, wodurch die obige Gleichung in die folgende übergeht:

$$A\{X(\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} - \mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}) + Y(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} - \mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}) + Z(\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} - \mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2})\}$$

$$+ B\{X(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}) + Y(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}) + Z(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\}$$

$$+ C(K\mathfrak{x} + K_1\mathfrak{y} + K_2\mathfrak{z})$$

$$+ \{X(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}) + Y(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}) + Z(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= X(\mathfrak{y}\frac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3} - \mathfrak{z}\frac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3}) + Y(\mathfrak{z}\frac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3} - \mathfrak{x}\frac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3}) + Z(\mathfrak{x}\frac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3} - \mathfrak{y}\frac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3}).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$16)\ \ldots\ U = \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t},\quad U_1 = \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t},\quad U_2 = \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

und

17)

$$V = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} - \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2},\quad V_1 = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2},\quad V_2 = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2};$$

so ist:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} - \mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2},\quad \frac{\partial U_1}{\partial t} = \mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} - \mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2},\quad \frac{\partial U_2}{\partial t} = \mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} - \mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - V = \eta \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} - \xi \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - V_1 = \xi \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} - x \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3},$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - V_2 = x \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} - \eta \frac{\partial^3 x}{\partial t^3}.$$

Also wird die obige Gleichung:

16) . . . . . $A(X\frac{\partial U}{\partial t} + Y\frac{\partial U_1}{\partial t} + Z\frac{\partial U_2}{\partial t})$

$$+(B+\frac{\partial A}{\partial t})(XU + YU_1 + ZU_2)$$

$$- C(Kx + K_1\eta + K_2\xi)$$

$$= X(V - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}) + Y(V_1 - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}) + Z(V_2 - \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}),$$

oder:

17)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -B - \frac{\left\{\begin{array}{l} A(X\frac{\partial U}{\partial t} + Y\frac{\partial U_1}{\partial t} + Z\frac{\partial U_2}{\partial t}) - C(Kx + K_1\eta + K_2\xi) \\ - X(V - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}) - Y(V_1 - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}) - Z(V_2 - \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}) \end{array}\right\}}{XU + YU_1 + ZU_2}.$$

§. 2.

Die Gleichungen der Berührenden der scheinbaren Bahn im Punkte ($x\eta\zeta$) in dem Coordinatensysteme, auf welches sich die Coordinaten x, η, ζ dieses Punktes beziehen, sind, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten in diesem Systeme bezeichnen, nach den Lehren der analytischen Geometrie:

18) . . . . . $\frac{\mathfrak{x} - x}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{\mathfrak{y} - \eta}{\frac{\partial \eta}{\partial t}} = \frac{\mathfrak{z} - \zeta}{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}.$

Durch den Mittelpunkt der Sphäre und diese Berührende, also auch durch den Punkt ($x\eta\zeta$), lege man eine Ebene, deren Gleichung die allgemeine Form

$$L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} = 0$$

haben wird; da aber diese Ebene durch den Punkt ($x\eta\zeta$) geht, so ist auch

$$Lx + My + Nz = 0,$$

folglich

$$L(\mathfrak{x} - x) + M(\mathfrak{y} - y) + N(\mathfrak{z} - z) = 0,$$

und daher, weil die Ebene durch die Berührende in dem Punkte (xyz) geht, nach 18):

$$L\frac{\partial x}{\partial t} + M\frac{\partial y}{\partial t} + N\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$Lx + My + Nz = 0,$$

$$L\frac{\partial x}{\partial t} + M\frac{\partial y}{\partial t} + N\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

ergiebt sich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$L = G(y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t}),$$

$$M = G(z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t}),$$

$$N = G(x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t});$$

so dass also nach dem Obigen

$$19) \ldots (y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t})\mathfrak{x} + (z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t})\mathfrak{y} + (x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t})\mathfrak{z} = 0$$

die Gleichung unserer Ebene ist.

Auf diese Ebene errichte man jetzt im Mittelpunkte der Sphäre ein Perpendikel, und bezeichne die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil dieses Perpendikels mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, durch α, β, γ; so sind die Gleichungen dieses Perpendikels:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\beta} = \frac{\mathfrak{z}}{\cos\gamma},$$

und nach den Lehren der analytischen Geometrie ist folglich

$$\frac{y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t}}{\cos\alpha} = \frac{z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t}}{\cos\beta} = \frac{x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}}{\cos\gamma};$$

also, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\alpha = G'(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t}),$$

$$\cos\beta = G'(\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t}),$$

$$\cos\gamma = G'(x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t});$$

folglich, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$20)\ .\ \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t}}{\sqrt{(x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})^2 + (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t})^2}}, \\ \cos\beta = \pm\dfrac{\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t}}{\sqrt{(x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})^2 + (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t})^2}}, \\ \cos\gamma = \pm\dfrac{x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{(x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})^2 + (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t})^2}}; \end{cases}$$

oder, weil

$$(x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})^2 + (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t})^2$$

$$= (x^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right\} - (x\frac{\partial x}{\partial t} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial t} + \zeta\frac{\partial\zeta}{\partial t})^2,$$

und folglich nach 5), 6), 7)

$$(x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})^2 + (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t})^2$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 = -(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2})$$

ist:

$$21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \pm \dfrac{\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2}}, \\ \cos\beta = \pm \dfrac{\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2}}, \\ \cos\gamma = \pm \dfrac{x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2}}; \end{array} \right.$$

oder:

$$22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \pm \dfrac{\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial t}}{\sqrt{-\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)}}, \\ \cos\beta = \pm \dfrac{\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial\zeta}{\partial t}}{\sqrt{-\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)}}, \\ \cos\gamma = \pm \dfrac{x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{-\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)}}. \end{array} \right.$$

Den Punkt, in welchem von dem vorher betrachteten Theile unsers Perpendikels, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, die Oberfläche der Sphäre geschnitten wird, wollen wir von jetzt an den positiven Pol des durch den Mittelpunkt der Sphäre und die Berührende der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(x\eta\zeta)$ derselben gelegten grössten Kreises der Sphäre nennen. Die dritte Coordinate dieses Pols ist offenbar $\cos\gamma$, und da diese Coordinate unter den gemachten Voraussetzungen nothwendig positiv ist, so sieht man, dass man in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem die Grösse

$$x\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t}$$

positiv oder negativ ist.

§. 3.

Die Gleichung der Ebene des Krümmungskreises der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(x\eta\zeta)$ derselben ist bekanntlich nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn immer $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen:

$$23) \quad \left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)(\mathfrak{X}-x)\\ &+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)(\mathfrak{Y}-\eta)\\ &+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)(\mathfrak{Z}-\zeta)\end{aligned}\right\}=0.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Mittelpunkte der Sphäre nach dem Mittelpunkte des in Rede stehenden Krümmungskreises, welcher natürlich immer ein Kreis der Sphäre ist, hin gezogene Gerade, die auf der Ebene des Krümmungskreises senkrecht steht, mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; so sind

$$\frac{\mathfrak{X}}{\cos\alpha_1}=\frac{\mathfrak{Y}}{\cos\beta_1}=\frac{\mathfrak{Z}}{\cos\gamma_1}$$

die Gleichungen der in Rede stehenden Geraden, und auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen findet man mit Beziehung der oberen oder unteren Zeichen auf einander:

$$24)$$

$$\cos\alpha_1=$$

$$\pm\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_1=$$

$$\pm\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_1 =$$

$$\pm\frac{\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)^2}};$$

wo man auch bemerken kann, dass

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right\}^2$$

ist.

Die dritte Coordinate des Mittelpunkts des Krümmungskreises hat offenbar gleiches Vorzeichen mit $\cos\gamma_1$. Liegt nun der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven Seite der Ebene der $x\eta$, und ist also $\cos\gamma_1$ positiv, so muss man in den obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

positiv oder negativ ist. Liegt dagegen der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der negativen Seite der Ebene der $x\eta$, und ist also $\cos\gamma_1$ negativ, so muss man in den obigen Formeln die oberen oder die unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

negativ oder positiv ist.

Bezeichnen wir den scheinbaren Halbmesser des Krümmungskreises, welcher offenbar immer ein spitzer Winkel ist, durch Δ, so ist

$$\cos\Delta=\cos\theta\cos\alpha_1+\cos\omega\cos\beta_1+\cos\bar{\omega}\cos\gamma_1,$$

also nach 3):

$$\cos\Delta=x\cos\alpha_1+\eta\cos\beta_1+\zeta\cos\gamma_1,$$

und folglich mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher nach 24):

25)

$$\cos \Delta =$$

$$\pm \frac{x\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)+\eta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)+\zeta\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)^2}}$$

oder:

26)

$$\cos \Delta =$$

$$\pm \frac{(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial \eta}{\partial t})\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+(\zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial \zeta}{\partial t})\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+(x\frac{\partial \eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t})\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)^2}}.$$

Weil nach 5)

$$x^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

ist, so kann man den Zähler von $\sin \Delta^2$ auf folgende Art ausdrücken:

$$(x^2+\eta^2+\zeta^2)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2\\ +\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)^2\\ +\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)^2\end{array}\right\}$$

$$-x^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)^2$$

$$-\eta^2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)^2$$

$$-\zeta^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2$$

$$-2x\eta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)$$

$$-2\eta\zeta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

$$-2\zeta x\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right),$$

und erhält hieraus zuerst ohne alle Schwierigkeit für diesen Zähler den folgenden Ausdruck:

$$\left\{x\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)-y\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\right\}^2$$

$$+\left\{y\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)-z\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\right\}^2$$

$$+\left\{z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)-x\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\right\}^2,$$

also ferner den Ausdruck:

$$\left\{\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial t}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right\}^2$$

$$+\left\{\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial t}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\}^2$$

$$+\left\{\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial t}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right\}^2,$$

folglich nach 6) den Ausdruck:

$$\left(x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\},$$

und daher nach 7) endlich den folgenden sehr einfachen Ausdruck:

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}^3.$$

Also ist:

27)

$$\sin\Delta=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)^2}},$$

folglich nach 25):

28)

$$\tang\Delta=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+z\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)},$$

oder:

29)

$$\tan g\,\Delta = \pm \frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial t})\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial \zeta}{\partial t})\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + (x\frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}},$$

wo immer dieselbe Bestimmung wegen des Vorzeichens gilt wie vorher.

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}
&(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial t})\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)\\
&+ (\zeta\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial \zeta}{\partial t})\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\\
&+ (x\frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial x}{\partial t})\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\\
= \quad &\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(\eta\frac{\partial \eta}{\partial t} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial t}) - \zeta\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}\\
&+ \frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(x\frac{\partial x}{\partial t} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial t}) - \eta\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}\\
&+ \frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x\frac{\partial x}{\partial t} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial t}) - \zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right\}\\
= \quad &(x\frac{\partial x}{\partial t} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial t} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial t})\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\\
&- \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}\left\{x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right\}\\
= - &\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}\left\{x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right\}\\
= \quad &\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}^2,
\end{aligned}$$

und folglich, wenn man

$$\cos\Delta_1 = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

setzt, wo die Bedeutung von Δ_1 aus dem Obigen leicht von selbst erhellen wird, nach 21) und 24):

30)

$$\cos\Delta_1 = \pm \frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)^2}},$$

wo eine Bestimmung wegen des Vorzeichens nicht weiter gegeben werden soll, indem wir hier nur die aus der Vergleichung der Formeln 27) und 30) sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$31) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin \Delta^2 = \cos \Delta_1{}^2$$

ableiten wollten.

§. 4.

Nach 28) ist:

$$x\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) + \eta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) + \zeta\left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$
$$= \pm \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \cot \Delta ,$$

oder nach 29:

$$(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial t}) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (\zeta \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial \zeta}{\partial t}) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + (x \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial x}{\partial t}) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$
$$= \pm \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \cot \Delta ;$$

wo wegen der Vorzeichen die folgenden Bestimmungen gelten:

Wenn der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven Seite der Ebene der $x\eta$ liegt, so muss man das obere oder untere Vorzeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

positiv oder negativ ist; wenn dagegen der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der negativen Seite der Ebene der $x\eta$ liegt, so muss man das obere oder untere Vorzeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

negativ oder positiv ist.

Nun ist aber nach 11)

$$x\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) + \eta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) + \zeta\left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$
$$= \frac{k^2}{\varrho} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{X}{R^3} - \frac{x}{r^3}\right)(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial t}) \\ + \left(\frac{Y}{R^3} - \frac{y}{r^3}\right)(\zeta \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial \zeta}{\partial t}) \\ + \left(\frac{Z}{R^3} - \frac{z}{r^3}\right)(x \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial x}{\partial t}) \end{array} \right\},$$

also nach 4):

$$x\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)+\eta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)+\zeta\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

$$=\frac{k^2}{\varrho}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\{X(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})+Y(\zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial\zeta}{\partial t})+Z(x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t})\}$$

$$-\frac{1}{r^3}\{x(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})+\eta(\zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial\zeta}{\partial t})+\zeta(x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t})\}$$

$$=\frac{k^2}{\varrho}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\{X(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})+Y(\zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial\zeta}{\partial t})+Z(x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t})\}.$$

Folglich ist nach dem Obigen, mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$\pm\varrho\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cot\Delta$$

$$=k^2\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\{X(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial t})+Y(\zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial\zeta}{\partial t})+Z(x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t})\}.$$

Führt man jetzt in diese Gleichung für

$$\eta\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial t},\quad \zeta\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial\zeta}{\partial t},\quad x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t}$$

ihre aus den Gleichungen 21) sich ergebenden Ausdrücke ein, so ergiebt sich Folgendes:

Wenn die Grösse

$$x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t}$$

positiv ist, so ist

$$\pm\varrho\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right\}\cot\Delta$$

$$=k^2\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma),$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Wenn die Grösse

$$x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t}$$

negativ ist, so ist

$$\mp \varrho \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right\} \cot \Delta$$

$$= k^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma),$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Bezeichnen wir die scheinbare Entfernung des positiven Pols des durch den Mittelpunkt der Sphäre und die Berührende der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(x\eta\zeta)$ derselben gelegten grössten Kreises der Sphäre von der Sonne durch D, so ist, weil offenbar $-X$, $-Y$, $-Z$ die Coordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde als Anfang sind, wie sogleich erhellet:

$$\cos D = -\frac{X}{R} \cos \alpha - \frac{Y}{R} \cos \beta - \frac{Z}{R} \cos \gamma,$$

also

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = -R \cos D,$$

was, in die obigen Gleichungen eingeführt, zu dem folgenden Resultate führt:

Wenn die Grösse

$$x \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial x}{\partial t}$$

positiv ist, so ist

$$\varrho \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right\} = \mp k^2 R \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \Delta \cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Wenn die Grösse

$$x \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial x}{\partial t}$$

negativ ist, so ist

$$\varrho \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right\} = \pm k^2 R \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \Delta \cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Weltkörpers in seiner scheinbaren Bahn in dem Punkte $(x\eta\zeta)$ derselben durch $\mathfrak{V}$, so ist bekanntlich:

$$\mathfrak{v}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2,$$

was zu dem folgenden Resultate führt:

Wenn die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}$$

positiv ist, so ist

$$\varrho\mathfrak{v}^2 = \mp k^2 R\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)\operatorname{tang}\Delta\cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Wenn die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}$$

negativ ist, so ist

$$\varrho\mathfrak{v}^2 = \pm k^2 R\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)\operatorname{tang}\Delta\cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Eine weitere an sich nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegende Discussion der Regeln wegen des Vorzeichens führt nun aber zu dem folgenden Resultate:

Es ist allgemein

$$32)\ \ldots\ \varrho\mathfrak{v}^2 = \pm k^2 R\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)\operatorname{tang}\Delta\cos D,$$

und wegen des Vorzeichens hat man sich an die folgenden Regeln zu halten.

Wenn der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven Seite der Ebene der xy liegt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem die Grössen

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Wenn der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der negativen Seite der Ebene der xy liegt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem die Grössen

$$x\frac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Bezeichnen wir die scheinbare Entfernung des Weltkörpers von der Sonne durch $\mathfrak{D}$, so ist

$$r^2 = R^2 - 2R\varrho\cos\mathfrak{D} + \varrho^2,$$

und die Gleichung 32) wird also:

$$\varrho = \pm\frac{k^2 R\,\mathrm{tang}\,\Delta\cos D}{\mathfrak{P}^2}\left\{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R^2-2R\varrho\cos\mathfrak{D}+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

oder

$$\frac{\varrho}{R} = \pm\frac{k^2\,\mathrm{tang}\,\Delta\cos D}{\mathfrak{P}^2 R^3}\left\{1-\frac{1}{\left[1-2\frac{\varrho}{R}\cos\mathfrak{D}+\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Setzen wir aber

$$33) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\varrho}{R} = \cos\mathfrak{D} + u\sin\mathfrak{D}$$

und der Kürze wegen

$$34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad C' = \frac{k^2\,\mathrm{tang}\,\Delta\cos D}{\mathfrak{P}^2 R^3},$$

so wird die vorstehende Gleichung, wie man leicht findet:

$$\cos\mathfrak{D} + u\sin\mathfrak{D} = \pm C'\left\{1-\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\sin\mathfrak{D}^3}\right\},$$

also:

$$35) \quad \ldots \quad \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \sin\mathfrak{D}^3\left(1\mp\frac{\cos\mathfrak{D}+u\sin\mathfrak{D}}{C'}\right),$$

oder:

$$36) \quad \ldots \quad \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin\mathfrak{D}^3}{C'}\left\{C'\mp(\cos\mathfrak{D}+u\sin\mathfrak{D})\right\}.$$

§. 5.

Wir wollen nun zeigen, wie man sich der im Vorhergehenden entwickelten Formeln zur Bestimmung der wahren Bahn des Weltkörpers bedienen kann.

Wenn man sich im Besitz einer grösseren Anzahl durch kleine Zeitintervalle von einander getrennter Beobachtungen des Weltkörpers befindet, so kann man immer mittelst der bekannten Interpolationsmethoden, über die natürlich hier nichts weiter zu sagen ist, die scheinbaren Coordinaten

$$\mathfrak{x} = \cos\theta, \quad \mathfrak{y} = \cos\omega, \quad \mathfrak{z} = \overline{\omega}$$

im Allgemeinen als Functionen der Zeit t darstellen, mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser die Anzahl der dabei benutzten Beobachtungen ist, und je genauer dieselben sind. Das Coordinatensystem ist hierbei ganz willkührlich, und es ist ganz gleichgültig, welche der drei Fundamentalebenen, die man bekanntlich in der Astronomie benutzt, den Beobachtungen zu Grunde gelegt wird. Denn sind überhaupt L, B die durch die Beobachtungen bestimmten polaren Coordinaten, so ist allgemein:

$$\mathfrak{x} = \cos\theta = \cos L \cos B,$$

$$\mathfrak{y} = \cos\omega = \sin L \cos B,$$

$$\mathfrak{z} = \cos\overline{\omega} = \sin B.$$

Hat man aber auf diese Weise $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch allgemeine Formeln als Functionen der Zeit t dargestellt, so kann man durch deren Differentiation auch allgemeine Ausdrücke der Differentialquotienten der Coordinaten als Functionen der Zeit t erhalten, wobei man nur bis zu den dritten Differentialquotienten zu gehen nöthig hat.

Ist man nun aber auf dem Wege der Interpolation zu diesen allgemeinen Ausdrücken der scheinbaren Coordinaten und ihrer Differentialquotienten bis zu den dritten als Functionen der Zeit gelangt, so kann man mittelst derselben diese scheinbaren Coordinaten und ihre Differentialquotienten für jede beliebige Zeit t berechnen, wozu man übrigens, wie aus der Natur dieser Interpolations-Rechnungen von selbst hervorgeht, am besten die möglichst in der Mitte zwischen den Zeiten der benutzten Beobachtungen liegenden Zeiten wählt, und findet dann durch Auflösung der drei linearen Gleichungen 13), in denen X, Y, Z die derselben Zeit entsprechenden, natürlich als bekannt zu betrachtenden Coordinaten der Erde bezeichnen, die drei Grössen A, B, C. Da sich nun voraussetzen lässt, dass man für die Erde die drei in 15) durch K, K_1, K_2 bezeichneten Constanten kennt*), so kann

---

) Die zur Berechnung dieser Constanten erforderlichen Formeln sind in I. 10) und I. 48) gegeben, wo diese Constanten für jeden beliebigen Weltkörper durch C, C_1, C_2 bezeichnet worden sind.

man mittelst der Formel 17) auch den der Zeit t entsprechenden Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial A}{\partial t}$ berechnen.

Weil nun nach 12)

$$A\varrho = 2\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

ist, so ist

$$A\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\frac{\partial A}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2},$$

und folglich, weil ferner nach 12)

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = (B - \frac{k^2}{r^3})\varrho$$

ist, wenn man zugleich

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \tfrac{1}{2}A\varrho$$

setzt:

$$A^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t} = 4(B - \frac{k^2}{r^3}),$$

also:

37) . . . . . $\frac{k^2}{r^3} = B - \frac{1}{4}(A^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t})$,

mittelst welcher Formel die Entfernung r des Weltkörpers von der Sonne zur Zeit t berechnet werden kann.

Ferner ist nach 12):

38) . . . . . $C\varrho = k^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$,

mittelst welcher Formel nun auch die curtirte Entfernung ϱ des Weltkörpers von der Erde zur Zeit t gefunden werden kann. Führt man in diese Formel den Werth von $\frac{k^2}{r^3}$ aus 37) ein, so erhält man:

39) . . . . $C\varrho = B - \frac{1}{4}(A^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t}) - \frac{k^2}{R^3}$,

mittelst welcher Formel ϱ unabhängig von r gefunden wird.

Bezeichnet endlich $\mathfrak{R}$ die wirkliche Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit t, so ist offenbar:

40) . . . . . $\mathfrak{R} = \varrho \sec B$,

wo B mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel $\sin B = \mathfrak{z}$ gefunden wird, wenn diese Grösse nicht schon bekannt sein sollte. Auch ist offenbar:

$$41) \quad \ldots \quad \mathfrak{K} = \frac{\varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(1-\mathfrak{z})(1+\mathfrak{z})}},$$

mittelst welcher Formel $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{z}$ und ϱ leicht gefunden werden kann.

Die weitere Berechnung der Elemente der Bahn braucht nach den im zweiten Kapitel gegebenen ausführlichen Entwickelungen natürlich hier nicht weiter erläutert zu werden.

§. 6.

Wenn nur drei durch nicht grosse Zwischenzeiten von einander getrennte Beobachtungen gegeben sind, so kann man näherungsweise den, durch die den drei Beobachtungen entsprechenden Projectionen des Weltkörpers auf der Sphäre bestimmten Kreis der Sphäre als den Krümmungskreis der scheinbaren Bahn in der mittleren der drei in Rede stehenden Projectionen betrachten, welches die Grundansicht ist, auf der die ganze folgende Methode der Bestimmung der wahren Bahn beruhet.

Wir wollen die den drei Beobachtungen entsprechenden scheinbaren Coordinaten des Weltkörpers durch

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}; \quad \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1; \quad \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_2$$

bezeichnen. Sind die durch die Beobachtungen bestimmten polaren Coordinaten des Weltkörpers

$$L, B; \quad L_1, B_1; \quad L_2, B_2;$$

so ist:

$$42) \quad . \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \cos L \cos B, & \mathfrak{y} = \sin L \cos B, & \mathfrak{z} = \sin B; \\ \mathfrak{x}_1 = \cos L_1 \cos B_1, & \mathfrak{y}_1 = \sin L_1 \cos B_1, & \mathfrak{z}_1 = \sin B_1; \\ \mathfrak{x}_2 = \cos L_2 \cos B_2, & \mathfrak{y}_2 = \sin L_2 \cos B_2, & \mathfrak{z}_2 = \sin B_2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun die Gleichung der durch die drei Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$, $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2)$ bestimmten Ebene des Krümmungskreises der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$ derselben durch

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} + E = 0,$$

so ist:

$$Ax + B\eta + C\zeta + E = 0,$$
$$Ax_1 + B\eta_1 + C\zeta_1 + E = 0,$$
$$Ax_2 + B\eta_2 + C\zeta_2 + E = 0;$$

woraus sich leicht ergiebt, dass immer

$$A = -\eta(\zeta_1 - \zeta_2) - \eta_1(\zeta_2 - \zeta) - \eta_2(\zeta - \zeta_1),$$
$$B = \quad x(\zeta_1 - \zeta_2) + x_1(\zeta_2 - \zeta) + x_2(\zeta - \zeta_1),$$
$$C = -(x\eta_1 - \eta x_1) - (x_1\eta_2 - \eta_1 x_2) - (x_2\eta - \eta_2 x),$$
$$E = \quad \zeta(x_1\eta_2 - \eta_1 x_2) + \zeta_1(x_2\eta - \eta_2 x) + x_2(x\eta_1 - \eta x_1)$$

gesetzt werden kann, wobei man auch noch zu bemerken hat, dass

$$E = -(Ax + B\eta + C\zeta)$$
$$= -(Ax_1 + B\eta_1 + C\zeta_1)$$
$$= -(Ax_2 + B\eta_2 + C\zeta_2)$$

ist, so dass also E immer aus A, B, C leicht gefunden werden kann; und führt man nun in diese Ausdrücke für die scheinbaren Coordinaten ihre aus 42) bekannten Ausdrücke durch die beobachteten polaren Coordinaten ein, so erhält man nach leichter Rechnung die folgenden Formeln:

$$A = -2\sin L \cos B \sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)$$
$$-2\sin L_1 \cos B_1 \sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B)$$
$$-2\sin L_2 \cos B_2 \sin\tfrac{1}{2}(B - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B + B_1),$$

$$B = \quad 2\cos L \cos B \sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)$$
$$+2\cos L_1 \cos B_1 \sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B)$$
$$+2\cos L_2 \cos B_2 \sin\tfrac{1}{2}(B - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B + B_1),$$

$$C = \quad \sin(L - L_1)\cos B \cos B_1$$
$$+\sin(L_1 - L_2)\cos B_1 \cos B_2$$
$$+\sin(L_2 - L)\cos B_2 \cos B,$$

$$E = -\sin(L_1 - L_2)\sin B \cos B_1 \cos B_2$$
$$-\sin(L_2 - L)\cos B \sin B_1 \cos B_2$$
$$-\sin(L - L_1)\cos B \cos B_1 \sin B_2.$$

Bezeichnen wir die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Sphäre auf die Ebene des Krümmungskreises senkrecht gezogenen Geraden durch

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{z}}{\cos\nu},$$

so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A}{\cos\lambda} = \frac{B}{\cos\mu} = \frac{C}{\cos\nu},$$

woraus man mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

sogleich die folgenden Formeln erhält:

$$44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda = \pm \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\mu = \pm \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\nu = \pm \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{array} \right.$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Setzt man

$$45) \quad \cos\lambda = \cos\Theta\cos\Omega, \ \cos\mu = \sin\Theta\cos\Omega, \ \cos\nu = \sin\Omega;$$

so ist:

$$\tang\Theta = \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}, \ \frac{\tang\Omega}{\cos\Theta} = \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}, \ \frac{\tang\Omega}{\sin\Theta} = \frac{\cos\nu}{\cos\mu};$$

und zur Berechnung von Θ und Ω hat man also nach 44) die folgenden Formeln:

$$46) \quad \tang\Theta = \frac{B}{A}, \ \tang\Omega = \frac{C}{A}\cos\Theta = \frac{C}{B}\sin\Theta^*).$$

---

*) Es genügt hierbei, für Θ den einen zwischen 0 und 180° liegenden Werth dieses Winkels zu setzen, welcher der ersten Gleichung in 46) genügt, und dann für Ω die zwei zwischen 0 und 360° liegenden Werthe dieses Winkels, welche den zwei letzten Gleichungen in 46) genügen. Bezeichnet also θ den einen in Rede stehenden Werth von Θ und Ω die beiden in Rede stehenden Werthe von Ω, so ist eigentlich:

$$\cos\lambda = \cos\theta\cos\Omega, \ \cos\mu = \sin\theta\cos\Omega, \ \cos\nu = \sin\Omega.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$, so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$A\mathfrak{x}_1 + B\mathfrak{y}_1 + C\mathfrak{z}_1 + E = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{x}_1}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{y}_1}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{z}_1}{\cos\nu};$$

aus denen sich sehr leicht die folgenden Formeln ergeben:

$$47) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = -\dfrac{E\cos\lambda}{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}, \\ \mathfrak{y}_1 = -\dfrac{E\cos\mu}{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}, \\ \mathfrak{z}_1 = -\dfrac{E\cos\nu}{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}; \end{cases}$$

oder, wie man leicht findet:

$$47^*) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = -\dfrac{AE}{A^2+B^2+C^2}, \\ \mathfrak{y}_1 = -\dfrac{BE}{A^2+B^2+C^2}, \\ \mathfrak{z}_1 = -\dfrac{CE}{A^2+B^2+C^2}. \end{cases}$$

Aus dem Vorzeichen von $\mathfrak{z}_1$ ergiebt sich unmittelbar, ob der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven oder auf der negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt.

Bezeichnet, wie früher Δ, jetzt Δ_1 den scheinbaren Halbmesser des Krümmungskreises, so ist, wenn man in den folgenden Formeln das Zeichen immer so nimmt, dass $\cos\Delta_1$ positiv wird:

$$48) \quad \ldots \quad \cos\Delta_1 = \mathfrak{x}_1\cos\lambda + \mathfrak{y}_1\cos\mu + \mathfrak{z}_1\cos\nu$$

oder:

$$49) \quad \cos\Delta_1 = \cos\lambda\cos L_1\cos B_1 + \cos\mu\sin L_1\cos B_1 + \cos\nu\sin B_1.$$

Durch den Mittelpunkt der Sphäre, den Punkt $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$ und das durch den Mittelpunkt der Sphäre gehende Perpendikel auf der Ebene des Krümmungskreises, dessen Gleichungen nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{z}}{\cos\nu}\ ^{*})$$

sind, lege man eine Ebene, deren Gleichung

$$A_1\mathfrak{x} + B_1\mathfrak{y} + C_1\mathfrak{z} = 0$$

sein mag; so ist:

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 = 0,$$

$$A_1\cos\lambda + B_1\cos\mu + C_1\cos\nu = 0;$$

woraus sich leicht ergiebt, dass

$$50)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 &= y_1\cos\nu - z_1\cos\mu,\\ B_1 &= z_1\cos\lambda - x_1\cos\nu,\\ C_1 &= x_1\cos\mu - y_1\cos\lambda \end{aligned}\right.$$

gesetzt werden kann.

Die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Sphäre und den Punkt $(x_1y_1z_1)$ gehenden, auf der vorhergehenden Ebene senkrecht stehenden Ebene sei:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = 0,$$

so ist:

$$\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{B}y_1 + \mathfrak{C}z_1 = 0,$$

$$A_1\mathfrak{A} + B_1\mathfrak{B} + C_1\mathfrak{C} = 0;$$

woraus sich leicht ergiebt, dass

$$51)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= B_1z_1 - C_1y_1,\\ \mathfrak{B} &= C_1x_1 - A_1z_1,\\ \mathfrak{C} &= A_1y_1 - B_1x_1; \end{aligned}\right.$$

folglich nach 50):

$$\mathfrak{A} = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\cos\lambda - x_1(x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu + z_1\cos\nu),$$

$$\mathfrak{B} = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\cos\mu - y_1(x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu + z_1\cos\nu),$$

$$\mathfrak{C} = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\cos\nu - z_1(x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu + z_1\cos\nu);$$

also, weil bekanntlich

---

*) Welche Zeichen in den Formeln für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ genommen werden, ist hierbei und im Folgenden ganz gleichgültig.

$$x_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1$$

ist:

$$52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \cos\lambda - x_1(x_1\cos\lambda + \eta_1\cos\mu + \zeta_1\cos\nu), \\ \mathfrak{B} = \cos\mu - \eta_1(x_1\cos\lambda + \eta_1\cos\mu + \zeta_1\cos\nu), \\ \mathfrak{C} = \cos\nu - \zeta_1(x_1\cos\lambda + \eta_1\cos\mu + \zeta_1\cos\nu); \end{array} \right.$$

wo, wie man leicht mittelst 42) und 45) findet:

$$53) \quad \ldots\ldots\ x_1\cos\lambda + \eta_1\cos\mu + \zeta_1\cos\nu$$
$$= \sin B_1 \sin\Omega + \cos(L_1 - \Theta)\cos B_1\cos\Omega$$

ist; folglich auch:

54)

$$\mathfrak{A} = \cos\Theta\cos\Omega - \cos L_1\cos B_1\{\sin B_1\sin\Omega + \cos(L_1 - \Theta)\cos B_1\cos\Omega\},$$
$$\mathfrak{B} = \sin\Theta\cos\Omega - \sin L_1\cos B_1\{\sin B_1\sin\Omega + \cos(L_1 - \Theta)\cos B_1\cos\Omega\},$$
$$\mathfrak{C} = \sin\Omega - \sin B_1\{\sin B_1\sin\Omega + \cos(L_1 - \Theta)\cos B_1\cos\Omega\};$$

welche Formeln man noch auf verschiedene Arten transformiren könnte.

Die Gleichungen des auf die vorhergehende Ebene in dem Mittelpunkte der Sphäre errichteten Perpendikels seien

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\lambda'} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\mu'} = \frac{\mathfrak{z}}{\cos\nu'};$$

so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$55) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda' = \pm\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}, \\ \cos\mu' = \pm\dfrac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}, \\ \cos\nu' = \pm\dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}; \end{array} \right.$$

oder:

$$56) \quad \ldots \quad \operatorname{tang}\Theta' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \quad \operatorname{tang}\Omega' = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\cos\Theta' = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\sin\Theta'$$

und

$$57) \quad \cos\lambda' = \cos\Theta'\cos\Omega', \cos\mu' = \sin\Theta'\cos\Omega', \cos\nu' = \sin\Omega'.$$

Für den auf der positiven Seite der Ebene der $x\eta$ liegenden Theil des so eben betrachteten Perpendikels ist $\cos\nu'$ offenbar positiv, und sollen also die Winkel λ', μ', ν' sich auf diesen Theil unsers Perpendikels beziehen, so muss man in den Formeln 55) die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse $\mathfrak{C}$ positiv oder negativ ist. Dies vorausgesetzt, ist nun, wenn D_1 jetzt für die zweite Beobachtung ganz dasselbe bedeutet wie D in §. 4., und X_1, Y_1, Z_1 und R_1 die Coordinaten der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung für die Sonne als Anfang und ihre Entfernung von der Sonne für dieselbe Zeit bezeichnen:

$$58) \quad \ldots \quad \cos D_1 = -\frac{X_1\cos\lambda' + Y_1\cos\mu' + Z_1\cos\nu'}{R_1},$$

mittelst welcher Formel D_1 gefunden werden kann, indem die Grössen X_1, Y_1, Z_1 und R_1 natürlich als bekannt vorauszusetzen sind.

Durch Interpolation wird man nun aus den drei Beobachtungen leicht allgemeine Ausdrücke der scheinbaren Coordinaten durch die Zeit, und daraus dann die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial t_1}, \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2}, \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t_1^2}, \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t_1^2}$$

berechnen können. Dann kann man aber auch die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1}\right)^2}$$

berechnen und die Vorzeichen der Grössen

$$x_1\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} - \eta_1\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t_1^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2}$$

bestimmen.

Bezeichnen wir endlich die scheinbare Entfernung des Weltkörpers von der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung durch $\mathfrak{D}_1$, so ist

$$59) \quad \ldots \quad \cos\mathfrak{D}_1 = -\frac{X_1x_1 + Y_1\eta_1 + Z_1\zeta_1}{R_1},$$

und wir haben also jetzt alle Data, welche erforderlich sind, um für die zweite Beobachtung die Gleichungen

$$C_1 = \frac{k^2\,\mathrm{tang}\,\Delta_1\cos D_1}{\mathfrak{v}_1^2 R_1^3}$$

und

$$\frac{1}{(1+u_1^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin \mathfrak{D}_1^3}{C'_1}\{C'_1 \mp (\cos \mathfrak{D}_1 + u_1 \sin \mathfrak{D}_1)\}$$

bilden zu können.

Aus der letzten Gleichung, in die man noch auf ähnliche Art wie in II. §. 11. eine neue mittelst der Formel

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}}$$

zu bestimmende, zwischen 0 und 1 liegende unbekannte Grösse v_1 einführen könnte, was wir, als keiner Schwierigkeit unterliegend und aus II. §. 11. bekannt, hier nicht weiter erläutern wollen, findet man u_1, und dann ϱ_1 und r_1 mittelst der Formeln:

$$60) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varrho_1 = R_1(\cos \mathfrak{D}_1 + u_1 \sin \mathfrak{D}_1), \\ r_1 = \sqrt{R_1^2 - 2R_1\varrho_1 \cos \mathfrak{D}_1 + \varrho_1^2}. \end{cases}$$

Wie man hieraus weiter die Elemente findet, ist bekannt und braucht nicht noch einmal von Neuem erläutert zu werden.

Anhang.

Mittelst einiger Rechnung und Zeichnung kann man beurtheilen, ob zur Zeit der zweiten Beobachtung die Entfernung des Weltkörpers von der Sonne grösser oder kleiner war als die Entfernung der Erde von der Sonne:

Zu dem Ende nehme ich an, dass man aus den gegebenen scheinbaren Coordinaten

$$x,\ \eta,\ \zeta;\quad x_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\quad x_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$$

des Weltkörpers die Grössen A, B, C mittelst der Formeln

$$\mathrm{A} = -\eta(\zeta_1 - \zeta_2) - \eta_1(\zeta_2 - \zeta) - \eta_2(\zeta - \zeta_1),$$

$$\mathrm{B} = \quad x(\zeta_1 - \zeta_2) + x_1(\zeta_2 - \zeta) + x_2(\zeta - \zeta_1),$$

$$\mathrm{C} = -(x\eta_1 - \eta x_1) - (x_1\eta_2 - \eta_1 x_2) - (x_2\eta - \eta_2 x)$$

$$= -x(\eta_1 - \eta_2) - x_1(\eta_2 - \eta) - x_2(\eta - \eta_1)$$

$$= \quad \eta(x_1 - x_2) + \eta_1(x_2 - x) + \eta_2(x - x_1),$$

$$\mathrm{E} = -(\mathrm{A}x + \mathrm{B}\eta + \mathrm{C}\zeta) = -(\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}\eta_1 + \mathrm{C}\zeta_1) = -(\mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}\eta_2 + \mathrm{C}\zeta_2)$$

berechnet habe, was einer Schwierigkeit nicht unterliegt.

Nach III. 47*) ist

$$\mathfrak{Z}_1 = -\frac{CE}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und $\mathfrak{Z}_1$ ist also positiv oder negativ, d. h. der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $x\eta$, jenachdem die Grössen C und E ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Nimmt man nun in den Formeln 44) die oberen Vorzeichen, was bekanntlich verstattet ist*), so ist nach 52), wie man leicht findet:

$$\mathfrak{A} = \frac{A-(Ax_1+B\eta_1+C\mathfrak{z}_1)x_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B-(Ax_1+B\eta_1+C\mathfrak{z}_1)\eta_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{C-(Ax_1+B\eta_1+C\mathfrak{z}_1)\mathfrak{z}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{A} = \frac{A+Ex_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mathfrak{B} = \frac{B+E\eta_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mathfrak{C} = \frac{C+E\mathfrak{z}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

und $\mathfrak{C}$ ist also positiv oder negativ, jenachdem $C+E\mathfrak{z}_1$ positiv oder negativ ist.

Nach 55) und 58) ist

$$\cos D_1 = \mp\frac{\mathfrak{A}X_1+\mathfrak{B}Y_1+\mathfrak{C}Z_1}{R_1\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos D_1 = \mp\frac{AX_1+BY_1+CZ_1+E(X_1x_1+Y_1\eta_1+Z_1\mathfrak{z}_1)}{R_1\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}},$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\mathfrak{C}$, d. h. nach dem Obigen $C+E\mathfrak{z}_1$, positiv oder negativ ist. Folglich hat $\cos D_1$ mit der Grösse

$$AX_1+BY_1+CZ_1+E(X_1x_1+Y_1\eta_1+Z_1\mathfrak{z}_1)$$

---

*) M. s. die Note auf S. 395.

ungleiches oder gleiches Vorzeichen, jenachdem $C + E\xi_1$ positiv oder negativ ist.

Mit Hülfe der scheinbaren Coordinaten

$$x,\ \eta;\quad x_1,\ \eta_1;\quad x_2,\ \eta_2$$

oder besser mit Hülfe der mehr als bloss drei Beobachtungen entsprechenden gleichnamigen scheinbaren Coordinaten, kann man nun leicht eine Zeichnung der Projection der scheinbaren Bahn auf der Ebene der $x\eta$ entwerfen. Verbindet man dann die Endpunkte der Coordinaten x_1 und η_1 mit einander durch eine Gerade und zieht durch den Punkt $(x_1\eta_1)$ eine Berührende an die in Rede stehende Projection der scheinbaren Bahn; so kennt man in den trigonometrischen Tangenten der 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theile dieser beiden Geraden mit dem positiven Theile der Axe der x einschliessen, die Quotienten

$$\frac{\eta_1}{x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\eta_1}{\partial x_1},$$

und wird nun auch leicht aus der Zeichnung die Vorzeichen der Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{x_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}\right)}{\partial t_1}$$

erkennen und entnehmen können. Es ist aber

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{x_1}\right)}{\partial t_1} = \frac{x_1\frac{\partial\eta_1}{\partial t_1} - \eta_1\frac{\partial x_1}{\partial t_1}}{{x_1}^2}$$

und

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}\right)}{\partial t_1} = \frac{\partial\left\{\frac{\partial\eta_1}{\partial t_1} : \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right\}}{\partial t_1} = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2\eta_1}{\partial {t_1}^2} - \frac{\partial\eta_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial {t_1}^2}}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)^2},$$

woraus man sieht, dass die Grössen

$$x_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} - \eta_1\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2\eta_1}{\partial {t_1}^2} - \frac{\partial\eta_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial {t_1}^2}$$

respective mit den Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{x_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}\right)}{\partial t_1}$$

jederzeit gleiche Vorzeichen haben, und dass also auch die Vorzeichen der beiden in Rede stehenden Grössen immer leicht aus der entworfenen Zeichnung erkannt werden können.

Man hat daher offenbar jetzt alle Data, welche nach III. erforderlich sind, um zu entscheiden, welches Zeichen in der Gleichung

$$\varrho_1 \mathfrak{V}_1^{\,2} = \pm\, k^2 R_1 \left(\frac{1}{R_1^{\,3}} - \frac{1}{r_1^{\,3}} \right) \operatorname{tang} \Delta_1 \cos D_1,$$

in welcher $\operatorname{tang} \Delta_1$ jederzeit positiv ist, genommen werden muss, und auch ein Kriterium zur Bestimmung des Vorzeichens von D_1, so dass sich also auch immer wird bestimmen lassen, ob r_1 grösser oder kleiner als R_1, d. h. ob zur Zeit der zweiten Beobachtung die Entfernung des Weltkörpers von der Sonne grösser oder kleiner als die Entfernung der Erde von der Sonne ist.

Hieraus, in Verbindung mit III., ergiebt sich der folgende merkwürdige Satz:

(I) . . C und E haben ungleiche Vorzeichen.

Wenn die Grössen

$$C + E\xi_1,$$

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + E(X_1\xi_1 + Y_1\eta_1 + Z_1\zeta_1)$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 < R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 > R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}\right)}{\partial t_1}$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Wenn die Grössen

$$C + E\xi_1,$$

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + E(X_1\xi_1 + Y_1\eta_1 + Z_1\zeta_1)$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 > R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 < R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}\right)}{\partial t_1}$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

(II) . . C und E haben gleiche Vorzeichen

Wenn die Grössen

$$C + E\zeta_1,$$

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + E(X_1\xi_1 + Y_1\eta_1 + Z_1\zeta_1)$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 < R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 > R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}\right)}{\partial t_1}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Wenn die Grössen

$$C + E\zeta_1,$$

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + E(X_1\xi_1 + Y_1\eta_1 + Z_1\zeta_1)$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 > R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 < R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}\right)}{\partial t_1}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Schon Lambert hat in den Mémoires de Berlin. 1771. p. 352. Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt, die ich aber für wenig genügend halte, indem ich vielmehr der Meinung bin, dass der Satz allein in seinem obigen Ausdrucke auf völlige Strenge Anspruch machen und in der Praxis von Nutzen sein kann.

Berichtigung.

S. 4 Zeile 23 v. u. lese man „Körper“ statt Köper.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grunert, Johann Aug.

Theorie der wahren und scheinbaren Bewegung eines Weltkörpers um die Sonne nebst neuen Methoden zur Bestimmung der Bahn aus drei Beobachtungen

Greifswald 1857

Astr.p. 57 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10060507-2